Mirages dans l'air :

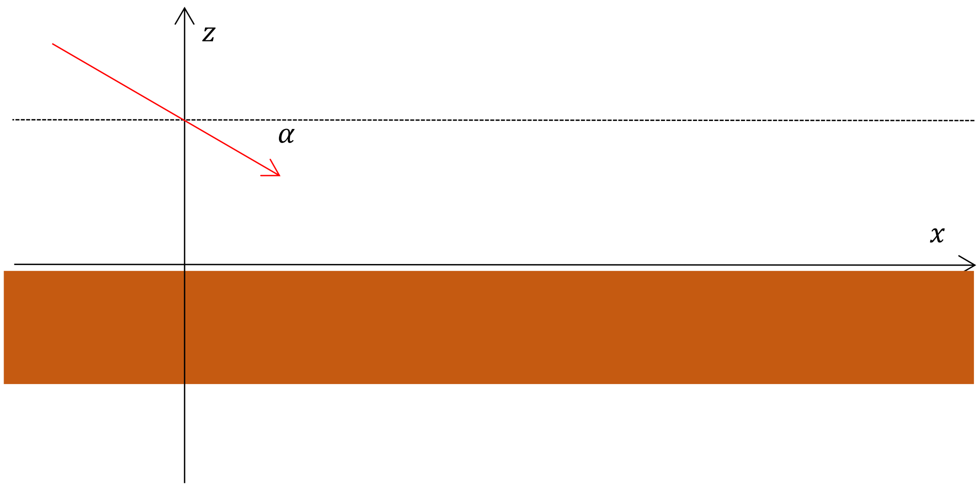
On considère de l'air, considéré comme un gaz parfait. Celui-ci est compris entre le sol, chaud, à la température T_1 et une couche d'air situé $0{,}3\ \mathrm{m}$ au de dessus du sol à la température $T_0 < T_1$. Le sol est à température constante et reçoit un flux surfacique d'énergie constant Φ à cause des rayons du Soleil.

1. À l'aide d'un modèle simple écrire la température sous la forme $T(z) = T_1(1 - kz)$. Donner l'expression de k.
2. Déterminer T_1 à partir de Φ.

On note z la hauteur, tel que $z_{sol} = 0$. On admet la relation de Gladstone $\frac{n^2-1}{\rho} = cste$ avec ρ la masse volumique du milieu. On suppose l'atmosphère en équilibre mécanique.

3. Montrer que $z = a\,n^2 + b$ avec a et n des constantes que vous exprimerez en fonction de n_1 l'indice optique de l'air à la température T_1, de k, de M la masse molaire équivalente de l'air, de g le champ de pesanteur terrestre local, de T_1 et de R la constante des gaz parfait.

On nomme α l'angle que fait un rayon lumineux avec l'horizontale.



4. Montrer que $n(z)\cos\alpha(z) = A$ avec A une constance à déterminer.
5. En déduire que $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{n}{a}\right)^2 - 1$.
6. Démontrer que la trajectoire empruntée par les rayons lumineux est une parabole. Justifier que la couche d'air se comporte comme un miroir.
7. Quel est l'angle maximal avec lequel les rayons peuvent entrer dans la couche d'air.