



A n a l y s e 3

ÉCOLE CENTRALE DE PÉKIN

Cours de mathématiques du cycle préparatoire

31 mai 2020

Table des matières

1	Séries numériques	1
1.1	Les suites	1
1.1.1	Premières propriétés	1
1.1.2	Les suites classiques	3
1.1.3	Les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue	4
1.1.4	Une technique utile	6
1.2	Les séries	6
1.2.1	Définitions	6
1.2.2	Premiers résultats de convergence	7
1.3	Séries numériques	9
1.3.1	Séries alternées	9
1.3.2	Séries à termes positifs	10
1.4	Autres techniques	17
1.4.1	Majoration par une série géométrique	17
1.4.2	Produit de Cauchy	17
1.4.3	Utilisation des transformations d'Abel	19
1.5	En pratique	20
2	Intégrales généralisées	22
2.1	Intégration sur un segment	22
2.1.1	Fonctions de classe \mathcal{C}^k par morceaux sur un segment	22
2.1.2	Intégrale d'une fonction en escalier	22
2.1.3	Intégrale des fonctions continues par morceaux	23
2.1.4	Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux	24
2.1.5	Primitive et intégrale	26
2.1.6	Méthodes de calcul d'intégrales	27
2.2	Définitions et exemples d'intégrales généralisées	30
2.2.1	Définitions	30
2.2.2	Exemples	32
2.2.3	Fonctions à valeurs positives	33
2.2.4	Intégrales absolument convergentes, fonctions intégrables	35
2.3	Propriétés de l'intégrale	36
2.3.1	Propriétés élémentaires	36
2.3.2	L'espace $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$	38

2.4	Deux exemples	39
3	Géométrie dans le plan et l'espace	42
3.1	L'espace affine \mathbb{R}^n	42
3.2	Géométrie dans le plan	42
3.2.1	Modes de repérage	43
3.2.2	Produit scalaire	45
3.2.3	Déterminant ou produit mixte	45
3.2.4	Droites du plan	46
3.2.5	Cercles du plan	48
3.3	Géométrie dans l'espace	48
3.3.1	Modes de repérage	48
3.3.2	Produit scalaire	50
3.3.3	Produit vectoriel	51
3.3.4	Déterminant (ou produit mixte)	52
3.3.5	Droites et plans	53
3.3.6	Sphères	56
4	Courbes paramétrées	57
4.1	Applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^n	57
4.1.1	Limites, continuité, dérivation	57
4.1.2	Dérivées d'applications classiques	58
4.2	Arcs paramétrés	59
4.2.1	Définitions	59
4.2.2	Interprétation cinématique	59
4.3	Étude locale d'un arc paramétré	60
4.3.1	Tangente en un point de l'arc	60
4.3.2	Formules de Taylor vectorielle	62
4.3.3	Étude locale en un point	63
4.3.4	Étude des branches infinies	65
4.4	Tracé des supports donnés en coordonnées cartésiennes	67
4.4.1	Réduction du domaine d'étude	68
4.4.2	Un exemple complet	70
4.5	Étude de courbes paramétrées en polaires	73
4.5.1	Représentation polaire	73
4.5.2	Étude d'une courbe définie par une équation polaire	74
4.5.3	Points d'inflexion	78
4.6	Propriétés métriques	80

5	Coniques	81
5.1	Définitions géométriques	81
5.1.1	Définition monofocale et représentation polaire	81
5.1.2	Les paraboles	83
5.1.3	Définition bifocale et équation cartésienne	84
5.2	Représentations paramétriques et tangentes	85
5.2.1	L'ellipse	85
5.2.2	L'hyperbole	86
5.3	Réduction des coniques	87
5.3.1	Généralités	88
5.3.2	Classification des coniques	88
6	Fonctions de deux variables	93
6.1	Motivations	93
6.1.1	Étude de courbes	93
6.1.2	Étude de surfaces	94
6.2	Topologie dans le plan \mathbb{R}^2	94
6.3	Continuité	96
6.4	Dérivées partielles	99
6.5	La formule de Taylor & Young	100
6.6	Le gradient	101
6.7	Extrema locaux	103

Chapitre 1 Séries numériques

Table des matières du chapitre

1.1	Les suites	1
1.1.1	Premières propriétés	1
1.1.2	Les suites classiques	3
1.1.3	Les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue	4
1.1.4	Une technique utile	6
1.2	Les séries	6
1.2.1	Définitions	6
1.2.2	Premiers résultats de convergence	7
1.3	Séries numériques	9
1.3.1	Séries alternées	9
1.3.2	Séries à termes positifs	10
1.4	Autres techniques	17
1.4.1	Majoration par une série géométrique	17
1.4.2	Produit de Cauchy	17
1.4.3	Utilisation des transformations d'Abel	19
1.5	En pratique	20

1.1 LES SUITES

1.1.1 Premières propriétés

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

DÉFINITION 1

Une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{K}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

On dira qu'une suite est convergente, s'il existe $l \in \mathbb{K}$ tel que u converge vers l et l'on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

Si une suite u n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente.

REMARQUE 2 — Une suite bornée n'est pas nécessairement convergente : la suite de terme général $u_n = e^{in}$ donne des contre-exemples :

$$e^{in} + e^{i(n+2)} = e^{i(n+1)}(e^{-i} + e^i) = 2e^{i(n+1)} \cos(1)$$

et en passant à la limite, on a $\cos(1) = 1$ ce qui est faux.

Généraliser à e^{inx} pour $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$

DÉFINITION 3

On dit qu'une suite **réelle** tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \geq A \text{ (resp. } u_n \leq A)$$

.

REMARQUE 4 — On dira que la suite réelle u admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ pour dire que soit elle converge vers $l \in \mathbb{R}$ soit elle tend vers $\pm\infty$. Mais une suite est convergente ssi sa limite l est finie.

THÉORÈME 5

(Théorème de Césaro) Soit u une suite qui tend vers $l \in \mathbb{K}$, alors la suite v de terme général $v_n = \frac{u_0 + \dots + u_{n-1}}{n}$ tend vers l . Si la suite est réelle et $l = \pm\infty$, alors le résultat est encore vrai.

Preuve — Si (u_n) converge vers $l \in \mathbb{K}$, alors $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $n > N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$.
D'où

$$\begin{aligned} |v_n - l| &= \left| \frac{(u_0 - l) + \dots + (u_{n-1} - l)}{n} \right| \\ &\leq \frac{|u_0 - l| + \dots + |u_{n-1} - l|}{n} \\ &\leq \frac{|u_0 - l| + \dots + |u_{N-1} - l|}{n} + \frac{n - N}{n} \varepsilon. \end{aligned}$$

On majore les deux termes de la somme :

1. L'entier N étant fixé, la somme $|u_0 - l| + \dots + |u_{N-1} - l|$ ne dépend pas de n et le quotient $\frac{|u_0 - l| + \dots + |u_{N-1} - l|}{n}$ tend vers 0.
Il existe $N' > N$ tel que si $n > N'$, $\frac{|u_0 - l| + \dots + |u_{N-1} - l|}{n} \leq \varepsilon$.
2. De plus, pour tout $n \geq N'$, $0 < \frac{n - N}{n} < 1$.

On a ainsi montré que pour $n > N'$, $|v_n - l| \leq 2\varepsilon$, d'où la conclusion qui est valable pour une suite complexe.

Si la suite est réelle et $l = +\infty$, alors $\forall A > 1, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow u_n > 3A$. On veut minorer la suite v_n pour $n > N$:

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{u_0 + \dots + u_{N-1}}{n} + \frac{u_N + \dots + u_{n-1}}{n} \\ &\geq \frac{u_0 + \dots + u_{N-1}}{n} + 3 \frac{n - N}{n} A \end{aligned}$$

Pour $n > 3N$, $3 \frac{n - N}{n} A > 2A > A + 1$. Le premier terme de la somme, lui, tend vers 0, donc il existe $N' > 3N$, tel que $n > N'$, $\frac{u_0 + \dots + u_{N-1}}{n} \geq -1$. Finalement, pour tout $A > 1$, il existe $n > N'$, tel que $n > N' \Rightarrow v_n > A$.

Si la suite est réelle et $l = -\infty$, on applique le résultat précédent à $-u_n$. □

PROPOSITION 6

Soit A une partie bornée non vide de \mathbb{R} . Alors M est la borne supérieure de A ssi M est un majorant de A et il existe une suite croissante qui converge vers M . Si $M \notin A$, alors on peut supposer la suite strictement croissante.

Preuve — D'après le théorème de la borne supérieure, M existe. On peut construire

1. $(u_n) \in A^{\mathbb{N}^*}$ qui converge vers $M : \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists u_n \in A \cap]M - \frac{1}{n}, M]$;
2. $(u_n) \in A^{\mathbb{N}^*}$ croissante et qui converge vers $M : \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists u_{n+1} \in A \cap]M - \frac{1}{n}, M] \cap [u_n, M]$;
3. Si $M \notin A$, $(u_n) \in A^{\mathbb{N}^*}$ strictement croissante et qui converge vers $M : \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists u_{n+1} \in A \cap]M - \frac{1}{n}, M[\cap]u_n, M[$. □

PROPOSITION 7

(Théorème d'encadrement des limites) Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites telles que à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$. Si (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite l , alors (v_n) converge vers l .

THÉORÈME 8

On dit que deux suites réelles u et v sont adjacentes si

1. u est croissante ;
2. v est décroissante ;
3. $v - u$ converge vers 0.

Et dans ce cas, les suites u et v sont convergentes et convergent vers une même limite l et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n \leq l \leq v_n.$$

Preuve — La suite $w = v - u$ est décroissante et tend vers 0, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $v_n - u_n \geq 0$ ce qui donne $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$. Les suites u et v sont monotones bornées, donc convergentes et vers la même limite car w tend vers 0. □

REMARQUE 9 — Un intérêt de ce théorème est de prouver la convergence de suites sans en connaître la valeur exacte, mais en ayant la possibilité de calculer une valeur approchée avec (u_n) ou (v_n) sachant que la marge d'erreur est $(v_n - u_n)$. Enfin, si les suites (u_n) et (v_n) sont strictement monotones, alors l'encadrement est strict : $u_n < l < v_n$.

EXEMPLE 10 — Un exemple classique est la démonstration de e irrationnel : on montre que les suites u et v définies par

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n n!}$$

sont adjacentes : on montre en effet que (u_n) est strictement croissante, (v_n) strictement décroissante et que $(v_n - u_n)$ tend vers 0.

On en déduit que la limite commune, notée e , est irrationnelle ; on suppose pour cela que s'écrit $e = \frac{a}{b}$ et on utilise l'encadrement donné par les suites : $u_b < e < v_b$ et on multiplie par $b!$.

REMARQUE 11 — Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels ou de complexes qui converge vers $l \neq 0$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est définie à partir d'un certain rang et tend vers 1.

PROPOSITION 12

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle qu'à partir d'un certain rang

1. $\frac{u_{n+1}}{u_n} < l < 1$, alors la suite (u_n) converge vers 0.
2. $\frac{u_{n+1}}{u_n} > l > 1$, alors la suite (u_n) tend vers $+\infty$.
3. $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, la suite peut converger ou diverger.

Preuve — Si $l > 1$, alors la suite est strictement croissante à partir d'un certain rang et ne peut converger vers un réel non nul d'après la remarque ci-dessus, donc elle tend vers $+\infty$. Si $l < 1$, alors la suite est strictement décroissante à partir d'un certain rang et est positive, donc converge, et la seule limite possible est 0.

La suite $u_n = n$ vérifie $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ mais est divergente. □

REMARQUE 13 — La suite $u_n = \frac{x^n}{n!}$ tend vers 0 car $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1}$ tend vers $0 < 1$.

1.1.2 Les suites classiques

1. Les *suites arithmétiques* sont les suites du type : $u_n = rn + u_0$, u_0 fixé, et alors $u_{n+1} = u_n + r$.
2. Les *suites géométriques* sont les suites du type : $u_n = q^n u_0$ avec u_0 fixé, et alors $u_{n+1} = qu_n$.
3. Les *séries géométriques* : Si $q \neq 1$, $\sum_{k=p}^n q^k = q^p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$.
4. Les *suites arithmético-géométriques* sont les suites du type : $u_{n+1} = au_n + b$, avec u_0 fixé et a et b des réels.
 - (a) Si $a = 1$, $u_n = bn + u_0$ (c'est une suite arithmétique).
 - (b) Si $a \neq 1$, on cherche une solution particulière constante $u_n = l$: on résout

$$l = al + b \iff l = \frac{b}{1 - a}$$

puis on ajoute la partie homogène : $v_n = (u_n - l)$ est une suite géométrique de raison a et de premier terme $u_0 - l$, donc

$$v_n = a^n v_0 \quad \text{et} \quad u_n = a^n (u_0 - l) + l.$$

5. Les sommes de Riemann : si f est continue sur $[a, b]$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f$$

EXEMPLE 14 — Soit les suites indexées par \mathbb{N} :

1. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \sqrt{2}$. Alors $u_n = n\sqrt{2} + 1$.
2. $u_0 = 2$, $u_{n+1} = 2u_n$, alors $u_n = 2^{n+1}$.
3. $u_0 = 2$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$, alors $u_{n+1} + 1 = 2(u_n + 1)$ et $u_n = 3 \times 2^n - 1$.

On calcule :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi \frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi x\right) dx = \frac{\sqrt{3}}{\pi}$$

1.1.3 Les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue

PROPOSITION 15

Soit $f : I \rightarrow I$, I un intervalle fermé. Pour tout $u_0 \in I$, la suite u définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ existe.

De plus, si (u_n) est convergente, elle converge vers un point fixe de f .

Preuve — i) Montrons par récurrence que la suite (u_n) est bien définie : On a $u_0 \in I$ et si $u_n \in I$ défini, alors $u_{n+1} = f(u_n) \in I$ car $f(I) \subset I$, ce qui prouve le point i).

ii) L'intervalle I étant fermé, si u_n converge, alors sa limite l reste dans I .

De plus, si f est continue et (u_n) converge vers $l \in I$, alors $f(u_n)$ converge vers $f(l)$; or $f(u_n) = u_{n+1}$ et donc $(f(u_n))$ converge aussi vers l , d'où $f(l) = l$. \square

On suppose f est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un domaine \mathcal{D} . On étudie la suite récurrente définie par $u_0 \in \mathcal{D}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de f et tracer son graphe.
2. On cherche les points de fixes de f :
 - (a) *Graphiquement* : Les points d'intersection de la droite d'équation $y = x$ avec le graphe de f correspondent aux points fixes, on a donc le plus souvent une bonne idée de leur nombre et de leur valeur.
 - (b) *Analytiquement* : On résoud étudie le signe de la fonction $g(x) = f(x) - x$. Le résultat doit être cohérent avec votre graphique!
3. On cherche un intervalle I (aussi petit que possible) stable par f tel que $u_0 \in I$. On sera le plus souvent dans l'un des trois cas suivants :
 - (a) Si f est croissante sur I , alors (u_n) est monotone. Cela résulte de l'étude de g ou encore :
 - si $u_0 \leq u_1$, alors on montre par récurrence que (u_n) est croissante et (u_n) converge vers le plus petit point fixe supérieur à u_0 (s'il en existe) ou tend vers $+\infty$ (sinon).
 - si $u_0 \geq u_1$, alors u_n est décroissante et converge vers le plus grand point fixe inférieur à u_0 (s'il existe) ou diverge sinon.
 En particulier, si I est un segment, alors la suite converge.
 - (b) Si f est décroissante sur I , les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de monotonie opposée car $f \circ f$ est croissante. Il faut alors étudier les points fixes de $f \circ f$. Il peut arriver que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) aient des limites distinctes.

EXEMPLE 16 — Soit $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{1}{6}(x^2 + 8)$. On étudie $g(x) = f(x) - x = 1/6(x^2 - 6x + 8)$: g admet 2 et 4 comme racines et g est négative entre 2 et 4. Les intervalles intéressants sont $I_1 = [0; 2]$, $I_2 = [2; 4]$ et $I_3 =]4; +\infty[$ sont stables par f .

- i) Si $u_0 \in I_1$, alors la suite est croissante et majorée, donc converge vers l'unique point fixe de I_1 , donc vers 2.

ii) Si $u_0 \in I_2$, la suite est décroissante et minorée, donc converge ; si $u_0 = \pm 4$, la suite est constante à partir du rang 1, sinon, (u_n) converge vers l'unique point fixe de $f < 4$, donc vers 2.

iii) Si $u_0 \in I_3$, alors la suite est croissante. Si elle convergerait, ce serait vers un point fixe de $f > 4$, mais il n'en existe pas, donc la suite n'est pas majorée, elle tend vers $+\infty$.

Si $u_0 < 0$, la fonction f n'est plus monotone sur un intervalle stable contenant u_0 . Mais si $u_0 \in]-4, 0]$, alors $u_1 \in [0, 4[$ et la suite converge vers 2 ; si $u_0 < -4$, alors la suite tend vers $+\infty$.

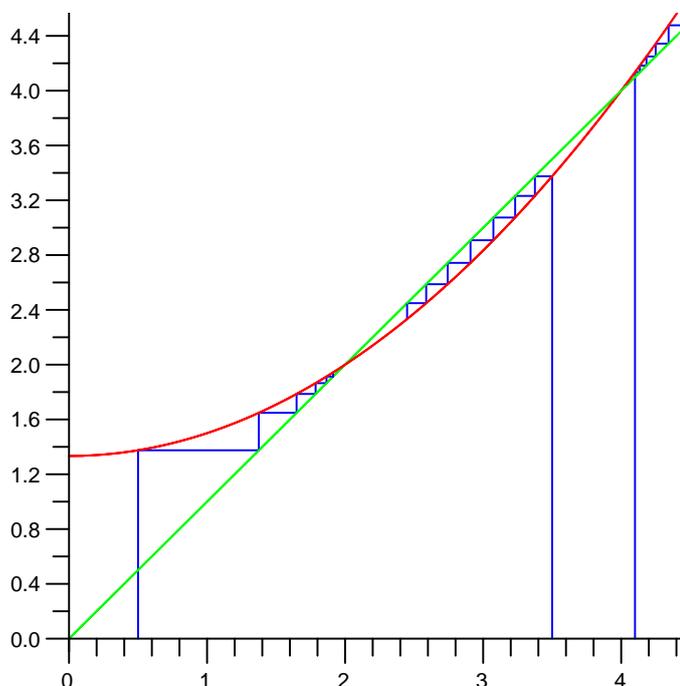


Illustration : $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f(x) = \frac{1}{6}(x^2 + 8)$ est croissante.

EXEMPLE 17 — On pose $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{1}{2} \arccos x$ et $u_0 \in [0; 1]$. La fonction est décroissante.

On remarque que $u_1 \in [0; \frac{\pi}{4}]$, donc $u_n \in [0; \frac{\pi}{4}]$ pour $n > 0$. On étudie $g(x) = \arccos x - x$ sur $[0; \frac{\pi}{4}]$. La dérivée est

$$g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 < 0$$

et comme $g(0) = \frac{\pi}{4}$ et $g(1) = -1$, g s'annule en unique point α et g est positive avant et négative après.

On montre que f est contractante sur I bien choisi : sur $[0; \frac{\pi}{4}]$,

$$-\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{\pi^2}{16}}} \leq f'(x) \leq -\frac{1}{2}$$

et l'application est k -lipschitzienne avec $k = \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{\pi^2}{16}}} \simeq 0.8 < 1$, donc u_n converge vers l'unique point fixe.

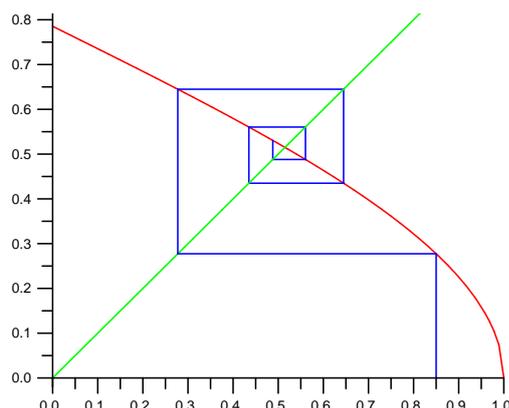


Illustration : $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f(x) = \frac{1}{2} \arccos x$ est décroissante.

Utiliser f contractante est beaucoup plus efficace que f décroissante pour l'étude la suite. Remarquons enfin qu'a priori nous ne connaissons pas la valeur du point fixe ; le calcul de u_n pour n assez grand permet d'en obtenir une valeur approchée. De plus, comme (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes, on a un contrôle de l'erreur.

1.1.4 Une technique utile

PROPOSITION 18

Lemme de l'escalier Soit $(v_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle qui tend vers $+\infty$. On suppose que $v_{n+1} - v_n$ tend vers un nombre $a \neq 0$. Alors $v_n \sim an$ (et $a > 0$).

Preuve — On applique le théorème de Césaro à $(v_{n+1} - v_n)_{n \geq 0}$. □

REMARQUE 19 — Si on a une suite (u_n) de réels > 0 qui tend vers 0, pour en avoir un équivalent on étudie $v_n = u_n^k$ avec k un réel négatif, de sorte que (v_n) tend vers $+\infty$. Si on montre que $v_{n+1} - v_n$ tend vers un nombre $a \neq 0$, on a $v_n \sim an$ (a est alors automatiquement > 0) et on a $u_n \sim a^{1/k} n^{1/k}$.

EXEMPLE 20 — On vérifie facilement que si $u_0 \in \mathbb{R}$, alors $u_{n+1} = \sin u_n$ tend vers 0, mais avec cette méthode, on trouve facilement un équivalent :

$$\frac{1}{u_{n+1}^l} - \frac{1}{u_n^l} = \frac{u_n^l - \sin^l u_n}{u_n^l \sin^l u_n} = \frac{u_n^l - u_n^l + l \frac{u_n^{l+2}}{6} + o(u_n^{l+2})}{u_n^{2l} + o(u_n^{2l})}$$

qui admet une limite non nulle ssi $l = 2$, d'où $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

1.2 LES SÉRIES

1.2.1 Définitions

On notera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

DÉFINITION 21

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathbb{K} .

1. On appelle série de terme générale u_n , la suite de terme général $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.
2. La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'appelle suite des sommes partielles de la série.

3. La série convergente si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. La limite S s'appelle somme de la série. On

$$\text{notera } S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

4. Si la série est convergente de somme S , $R_n = S - \sum_{k=0}^n u_k$ s'appelle le reste de la série d'ordre n :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k.$$

REMARQUE 22 — On écrira parfois $\sum u_n$ pour indiquer la série de terme général u_n , mais on évitera d'écrire $\sum_{n=0}^{+\infty}$ tant que la convergence de la série n'a pas été prouvée.

EXEMPLE 23 — Soit $x \neq 1$ et $S_n = \sum_{k=0}^n x^k$ la série de terme général $u_n(x) = x^n$ pour $n \geq 0$.

$$S_n = 1 + x + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad S = \frac{1}{1 - x}, \quad R_n = \frac{x^{n+1}}{1 - x}.$$

Donc la série géométrique converge ssi $|x| < 1$.

De plus, en intégrant l'expression entre 0 et t , on obtient pour $t \in]-1; 1[$

$$-\ln(1 - t) = t + \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{t^{n+1}}{n+1} + \int_0^t \frac{x^{n+1}}{1 - x} dx.$$

Mais si $t \in]-1; 0]$,

$$\left| \int_0^t \frac{x^{n+1}}{1 - x} dx \right| \leq \int_0^{|t|} x^{n+1} dx \leq \frac{1}{n+1}.$$

Donc, $\forall t \in]-1; 0]$

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{t^k}{k} + \ln(1 - t) \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

En faisant tendre t vers -1 on obtient que la série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ converge vers $-\ln(2)$.

REMARQUE 24 — L'ensemble des séries convergentes est un sous-espace vectoriel.

Par contre, on ne peut pas définir a priori un produit interne sur les séries :

$$\left(\sum u_n \right) \left(\sum v_n \right) \stackrel{?}{=} \begin{cases} \sum u_n v_n & \text{Produit de Hadamard} \\ \sum w_n, \quad w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} & \text{Produit de Cauchy} \end{cases}$$

Le problème est que la série obtenue n'est pas nécessairement convergente et la limite d'un produit ne converge pas nécessairement vers le produit des limites !

PROPOSITION 25

Soit $\sum u_n$ la série de terme général u_n converge, alors (u_n) tend vers $0 \in \mathbb{K}$.

Preuve — On écrit $u_n = S_n - S_{n-1}$ et si (S_n) converge, alors (u_n) tend vers 0.

Si terme général d'une série ne tend pas vers 0, on dit qu'elle diverge grossièrement. □

1.2.2 Premiers résultats de convergence

§ 1. Convergence absolue

PROPOSITION 26

Une série $\sum u_n$ à termes positifs : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$ converge ssi la suite des sommes partielles $\sum_{k=0}^n u_k$ est majorée et sinon la série tend vers $+\infty$.

Preuve — Une suite croissante à termes positifs est soit bornée et alors converge soit tend vers $+\infty$. \square

REMARQUE 27 — Même si c'est “évident” d'après le contexte, vous écrirez “ $\sum u_n$ est une série à termes positifs majorée donc convergente” et jamais “ $\sum_n u_n$ est majorée donc convergente”.

PROPOSITION 28

Soit $u_n > 0$ et $u_n \leq v_n$, alors $\sum v_n$ converge implique que $\sum u_n$ converge ; $\sum u_n$ diverge implique que $\sum v_n$ diverge.

REMARQUE 29 — Pour une série à termes positifs diverger et tendre vers $+\infty$ est équivalent, mais pas en général. Évitez de dire la série diverge pour dire qu'elle tend vers $+\infty$!

EXEMPLE 30 — On a $0 < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$. Dans l'exemple 36 nous allons montrer que $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ converge. On en déduit que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

DÉFINITION 31

On dit qu'une série $\sum_n u_n$ de E est absolument convergente si la série de terme général $|u_n|$ converge.

PROPOSITION 32

Une série absolument convergente est convergente.

Preuve — Si la suite est réelle, on pose $u_n^+ = \max(0, u_n)$ et $u_n^- = \max(0, -u_n)$. Les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont des séries à termes positifs et majorées par $\sum |u_n|$ donc sont convergentes et on note leur limite respective l^+ et l^- . Comme $u_n = u_n^+ - u_n^-$, on en déduit que la série $\sum u_n$ converge et que sa limite est $l^+ - l^-$.

Pour une suite à termes complexes $z_n = x_n + iy_n$ avec (x_n) et (y_n) des suites réelles, on sait que $|x_n|$ et $|y_n|$ sont majorés par $|z_n|$. On en déduit que les séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ sont absolument convergentes, donc convergentes et $\sum z_n$ est aussi convergente. \square

REMARQUE 33 — Une série convergente n'est pas nécessairement absolument convergente. Par exemple la série harmonique alternée $\left(\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k}\right)$ converge, mais n'est pas absolument convergente (?). On dit dans ce cas que la série est semi-convergente.

REMARQUE 34 —

1. Pour montrer la convergence d'une série, on commencera par essayer de montrer qu'elle est absolument convergente. Pour les suites à termes positifs on va donner au paragraphe suivant des techniques très efficaces.
2. L'ensemble des séries absolument convergentes est encore un sous-espace vectoriel de $l^1(\mathbb{K})$. L'application $\sum u_n \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ est une norme sur $l^1(\mathbb{K})$.

§ 2. Séries télescopiques

PROPOSITION 35

(Séries télescopiques) Une série télescopique est une série de terme général $u_n = v_{n+1} - v_n$, où $(v_n)_{n \geq 0}$

est une suite donnée.

Dans ce cas, la somme partielle vaut $S_n = v_{n+1} - v_0$ et donc la série converge ssi $(v_n)_{n \geq 0}$ converge.

EXEMPLE 36 —

1. Soit $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n u_k$. On écrit

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = v_n - v_{n+1} \quad \Rightarrow \quad S_n = v_1 - v_{n+1} = -\frac{1}{n+1} + 1.$$

et donc la série converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

2. Soit $S_n = \sum_{k=2}^n \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k \geq 2}^n (\ln(k+1) + \ln(k-1) - 2 \ln k) \\ &= \sum_{k \geq 2}^n [\ln(k+1) - \ln k] - [\ln k - \ln(k-1)] \\ &= \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) - \ln 2 \end{aligned}$$

dont on déduit que S_n converge vers $-\ln 2$.

REMARQUE 37 — L'écriture $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ a un sens mais ce n'est pas égal à $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$ qui n'en a pas car les séries divergent.

1.3 SÉRIES NUMÉRIQUES

1.3.1 Séries alternées

DÉFINITION 38

Une $\sum u_n$ de réels est une série alternée si la suite $((-1)^n u_n)$ est de signe constant.

PROPOSITION 39

(Critère de Leibniz) Soit une série alternée de terme général u_n telle que

- i) La suite $(|u_n|)$ est décroissante.
- ii) $\lim u_n = 0$.

Alors

1. La série est convergente.
2. Si S est sa somme, alors S est compris entre deux sommes partielles d'indices consécutifs.
3. S est du signe de u_0 et $|S| \leq |u_0|$.
4. Le reste d'ordre n R_n de la série est du signe de u_{n+1} et $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

Preuve — On montre que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes et toutes les affirmations en résultent.

Commençons par remarquer que $u_n + u_{n+1}$ est toujours du signe de u_n car $(|u_n|)$ décroît.

La différence $S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1}$ tend par hypothèse vers 0 par hypothèse.

De plus, (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont monotones de monotonies inversées car $S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2}$ est du signe de u_{2n+2} , $S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1}$ est du signe de u_{2n+1} et u_{2n+2} et u_{2n+1} sont de signe contraire puisque la suite est

alternée.

Les deux suites étant adjacentes, elles convergent vers une même limite S et le point 2 résulte de l'encadrement de la limite des suites adjacentes.

Pour le point 3, on écrit

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_0 + u_1) + \cdots (u_{2n} + u_{2n+1})$$

qui est une somme de termes de même signe, celui de u_0 . De même

$$S - u_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_1 + u_2) + \cdots (u_{2n+1} + u_{2n+2})$$

est du signe opposé à u_0 , donc si $u_0 \geq 0$, S et u_0 sont de positifs et $S - u_0 \leq 0$ et si $u_0 \leq 0$, alors $S \leq 0$ et $S - u_0 \geq 0$, ce qui montre le point 3.

Pour le point 4, on écrit $R_n = \sum_{k \geq n+1}^{+\infty} u_k$ qui est encore une série alternée, on applique les résultats précédents. \square

REMARQUE 40 —

1. Ce résultat s'appelle aussi la règle de Leibniz ou le critère spécial des séries alternées. Il ne donne pas que la convergence de la série, mais encadre le reste.
2. Le piège quand on utilise le Critère de Leibniz est d'oublier de montrer que la suite (u_n) est décroissante : la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n e^{-(n-5)^2}$ vérifie le critère des séries alternées pour $n \geq 5$!

EXEMPLE 41 — La série harmonique alternée est convergente vers $-\ln 2$. Le critère spécial des séries alternées montre aussi que

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} \leq -\ln 2 \leq \sum_{k=1} \frac{(-1)^k}{k}.$$

1.3.2 Séries à termes positifs

Dans cette partie, on considère une série $\sum u_n$ de terme général u_n réel strictement positifs.

§ 1. Comparaison des suites

PROPOSITION 42

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries à termes positifs telles que $u_n = O(v_n)$; alors la convergence de $\sum v_n$ implique la convergence de $\sum u_n$. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Preuve — Si $u_n = O(v_n)$, alors il existe $A > 0$ tels que pour $n \geq N$, $0 \leq u_n \leq Av_n$ et $\sum (Av_n)$ est encore convergente à termes positifs, donc $\sum u_n$ converge.

De même, si $\sum u_n$ tend vers $+\infty$, il en est de même pour $\sum v_n$. \square

COROLLAIRE 43

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$; alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Preuve — On a alors $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$, d'où la conclusion. \square

REMARQUE 44 — Ces propriétés ne sont plus vraies pour des suites quelconques (non nécessairement positives) : si $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$, alors $u_n \sim v_n$ mais $\sum u_n$ converge (série alternée) tandis que $\sum v_n$ est la somme d'une série convergente plus une série divergente, donc diverge.

EXEMPLE 45 — Déterminer si la série $\sum_n u_n$ est convergente dans les cas suivants :

1. $u_n = \frac{1}{n} e^{-n}$, $n \in \mathbb{N}^*$;
2. $u_n = n^2 e^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$;
3. $u_n = \frac{n+1}{n^2+1}$, $n \in \mathbb{N}$;

$$4. u_n = \frac{\cos n}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*.$$

$$5. u_n = \frac{1}{\ln n}, n \geq 2.$$

THÉORÈME 46

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs et $\sum v_n$ une série telle que $v_n = o(u_n)$ (resp. $v_n = O(u_n)$). Alors

1. Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge et

$$\sum_{k=n}^{+\infty} v_k = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right) \quad (\text{resp. } 0\left(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right)).$$

2. Si $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n$ diverge et

$$\sum_{k=0}^n v_k = o\left(\sum_{k=0}^n u_k\right) \quad (\text{resp. } O\left(\sum_{k=0}^n u_k\right)).$$

Preuve — Pour le 1/, écrivons $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq N$

$$0 \leq |v_n| \leq \varepsilon u_n$$

En sommant entre n et p et en faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient

$$0 \leq \sum_{k=n}^{+\infty} |v_k| \leq \varepsilon \sum_{k=n}^{+\infty} u_k,$$

ce qui montre le résultat.

Pour le 2/, on a encore $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq N$

$$0 \leq |v_n| \leq \varepsilon u_n$$

et en sommant

$$0 \leq \sum_{k=0}^n |v_k| \leq \sum_{k=0}^{N-1} |v_k| + \varepsilon \sum_{k=N}^n u_k.$$

Or il existe N' tel que pour $n \geq N' \geq N$, $\sum_{k=0}^{N-1} |v_k| \leq \varepsilon \sum_{k=N}^n u_k$ puisque la série $\sum u_n$ tend vers $+\infty$ et donc

$$0 \leq \sum_{k=0}^n |v_k| \leq 2\varepsilon \sum_{k=N}^n u_k \leq 2\varepsilon \sum_{k=0}^n u_k.$$

Par définition, on a bien $\sum_{k=0}^n v_k = o\left(\sum_{k=0}^n u_k\right)$. □

COROLLAIRE 47

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$. Alors

1. Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge et les restes sont équivalents :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k.$$

2. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge et les sommes partielles sont équivalentes :

$$\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k.$$

Preuve — Comme $u_n \sim v_n$ ssi $(v_n - u_n) = o(u_n)$, on peut appliquer le théorème ci dessus et le résultat est immédiat. □

REMARQUE 48 —

1. Ce théorème montre bien l'intérêt des équivalents : si (u_n) on converge vers l , on étudie $(l - u_n)$ et si (u_n) tend vers $+\infty$, on étudie la suite elle-même.

2. Le théorème de Césaro : si (u_n) converge vers $a \neq 0$, alors $\sum_{k=0}^{n-1} u_k$ est équivalent à na ! Et si u_n tend vers 0, alors $u_n = o(1)$, d'où $\sum_{k=0}^{n-1} u_k = o(n)$. On obtient donc une autre preuve du théorème.

EXEMPLE 49 —

1. (Séries de Riemann) Ce sont les séries $\sum \frac{1}{n^\alpha}$. On utilise les sommes télescopiques.

(a) Si $\alpha > 1$, on pose $v_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} > 0$. On a pour $\alpha \neq 1$:

$$v_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} \left(1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^{\alpha-1} \right) = \frac{1}{n^{\alpha-1}} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{\alpha-1} \right] \sim \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$$

La somme télescopique $\sum v_n$ converge car $\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} \right)$ tend vers 0. Donc, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge. On en déduit aussi un équivalent du reste :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1} \sum_n^{+\infty} v_k = \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

(b) Si $\alpha < 1$, on pose $v_n = \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} > 0$ et

$$v_n \sim \frac{1-\alpha}{n^\alpha},$$

et dans ce cas $\sum v_n$ tend vers $+\infty$, donc $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge et on obtient même un équivalent de la série elle-même : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{1-\alpha} \sum_{k=1}^n v_n = \frac{1}{(1-\alpha)} \times \left[\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - 1 \right] \sim \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

2. On prouve la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n},$$

Pour cela, on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = \ln \left[\left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-1} \right].$$

On calcule

$$v_n = -1 + \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = -1 + \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit que la série $\sum v_n$ converge d'après la Proposition 42. Or $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$, donc la suite $(\ln(u_n))$ converge vers λ un réel (d'après la proposition 35) et \ln étant continue, ainsi (u_n) converge vers $e^\lambda > 0$. On pose $k = e^{-\lambda}$.

On en déduit que $n! \sim k \sqrt{n} n^n e^{-n}$.

Pour calculer la valeur de k , nos résultats sur l'intégrale de Wallis $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt : I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$ et une IPP donne pour $n \geq 2$

$$nI_n = (n-1)I_{n-2}.$$

On obtient ainsi

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{(2n-1) \times (2n-3) \times \cdots \times 1}{2n \times (2n-2) \times \cdots \times 2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

et

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} = \frac{2n \times (2n-2) \times \cdots \times 2}{(2n+1) \times (2n-3) \times \cdots \times 1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

On peut alors calculer un équivalent du quotient en fonction de k :

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{2}{(2n+1)\pi} \left[\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \right]^2 \sim \frac{1}{\pi n} \left(\frac{2^{2n} k^2 n n^{2n} e^{-2n}}{k \sqrt{2n} (2n)^{(2n)} e^{-2n}} \right)^2 \sim \frac{k^2}{2\pi}.$$

On $I_{2p} \sim I_{2p+1}$, d'où $\frac{k^2}{2\pi} \sim 1$ et $k = \sqrt{2\pi}$.

3. Déterminer en fonction du paramètre $\alpha > 0$ la nature de la série $\sum u_n$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha + (-1)^n}.$$

La suite ici n'est plus de signe constant. On va d'abord faire un développement asymptotique pour éliminer la partie qui oscille :

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \times \frac{1}{1 + (-1)^n n^{-\alpha}} = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right).$$

Or pour tout $\alpha > 0$, $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ est une série alternée (pas $\sum u_n$!), donc converge, et $\sum u_n$ est de même nature que $\sum v_n$ avec $v_n = \frac{1}{n^{2\alpha}}$. D'après ce qui précède, la série $\sum u_n$ converge ssi $2\alpha > 1$ soit $\alpha > \frac{1}{2}$.

§ 2. Utilisation de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

PROPOSITION 50

(Théorème de comparaison logarithmique) Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ à partir d'un certain rang n_0 . Alors

1. Si la série $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ aussi.
2. Si la série $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ aussi.

Preuve — On fait le produit des inégalités entre n_0 et n : $\forall n \geq n_0$, on obtient $\frac{u_n}{u_{n_0}} \leq \frac{v_n}{v_{n_0}}$ et donc $u_n \leq \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} v_n$ et le théorème de comparaison des suites impliquent le résultat. On pouvait aussi prendre le logarithme des inégalités et on obtenait $\ln u_{n+1} - \ln u_n \leq \ln v_{n+1} - \ln v_n$ ce qui donnait des sommes télescopiques. \square

COROLLAIRE 51

(Règle de D'Alembert) Soit $\sum u_n$ est une série à termes strictement positifs.

1. S'il existe $k < 1$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$ à partir d'un certain rang, alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ à partir d'un certain rang, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Preuve — On applique le théorème de comparaison logarithmique avec $v_n = k^n$. \square

REMARQUE 52 — On a une autre version du critère de D'Alembert que l'on peut aussi retrouver à partir du corollaire : si $u_n > 0$ et $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = l < 1$, alors $\sum u_n$ converge (prendre $k = \frac{1+l}{2}$) et si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = l > 1$ la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

EXEMPLE 53 — Étudier la convergence de la série de terme générale $\sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!}$

REMARQUE 54 — (Règle de Duhamel) Si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, le critère de D'Alembert ne permet pas de statuer sur la convergence de la série. L'idée est alors de u_n avec $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On calcule alors un dl

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

1. Si $\beta > 1$, alors $\sum u_n$ converge : prendre $1 < \alpha < \beta$.
2. Si $\beta < 1$, alors $\sum u_n$ diverge : prendre $\alpha = 1$.

EXEMPLE 55 — Soit $\sum u_n$ la série de terme général $\frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n} \times \frac{1}{2n+1}$.

On calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} = 1 - \frac{6n-5}{(2n+2)(2n+3)} = 1 - \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Or si $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$ avec $1 < \alpha < \frac{3}{2}$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\alpha - \beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) < 0$, pour n assez grand. D'après le théorème de comparaison logarithmique, $\sum u_n$ converge.

§ 3. Critère de Cauchy

PROPOSITION 56 (Critère de Cauchy)

Soit (u_n) une suite strictement positive telle que

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \ell.$$

1. Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.
2. Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Preuve — On va comparer la suite u_n et une suite géométrique.

1. Si $\ell < 1$, alors il existe un réel $0 \leq \lambda < 1$ tel que $u_n \leq \lambda^n$ à partir d'un certain rang et la série $\sum \lambda^n$ converge, d'où la série $\sum u_n$ converge aussi.
2. Si $\ell > 1$, alors il existe un réel $\lambda > 1$ tel que $u_n \geq \lambda^n > 1$ à partir d'un certain rang, donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement. □

EXEMPLE 57 — Soit la suite $u_n = e^{-n+(-1)^n}$:

$$\sqrt[n]{u_n} = e^{-1 + \frac{(-1)^n}{n}} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1.$$

Donc la série $\sum u_n$ converge, d'après le critère de Cauchy.

REMARQUE 58 —

1. Le critère de D'Alembert ne permet pas de conclure dans l'exemple précédent car

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-n-1-(-1)^{n+1}+n-(-1)^n} = e^{1-2(-1)^n} \text{ n'a pas de limite.}$$

2. En fait, le critère de Cauchy est toujours plus fort que le critère de D'Alembert : si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors $\lim \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

Preuve — Si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \ell - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell + \varepsilon$. D'où (par récurrence) :

$$\forall n \geq N, u_N \cdot (\ell - \varepsilon)^{n-N} \leq u_n \leq u_N \cdot (\ell + \varepsilon)^{n-N}. \text{ Or } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_N \cdot (\ell \pm \varepsilon)^{n-N}} = \ell \pm \varepsilon.$$

D'où $\exists N' \geq N, \forall n \geq N', \ell - 2\varepsilon \leq u_n \leq \ell + 2\varepsilon$. Donc $\lim \sqrt[n]{u_n} = \ell$. □

§ 4. Comparaison séries - intégrales

DÉFINITION 59

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est convergente si la limite quand $x \rightarrow +\infty$ de $\int_a^x f(t) dt$ existe et alors on note

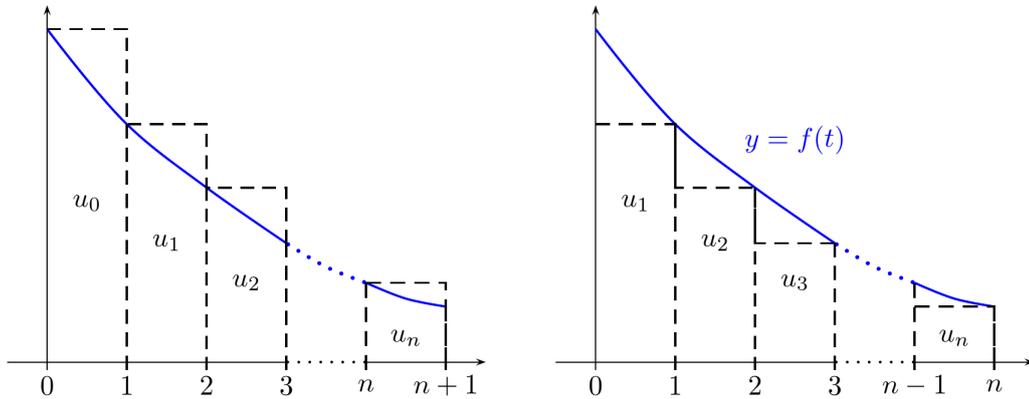
$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$$

EXEMPLE 60 — On a $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$

THÉORÈME 61

Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux à valeurs réelles positives décroissante.

1. Alors la série de terme générale $v_n = \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$ est convergente.
2. La série $\sum f(n)$ converge ssi l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge.
3. Si la série $\sum f(n)$ diverge, alors $\sum_{k=0}^n f(k) \sim \int_0^n f(t) dt$.



L'intégrale de f est encadrée par des séries de terme général $f(n)$.

Preuve — Pour le 1/ Comme f est décroissante,

$$0 \leq \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n) \leq f(n-1) - f(n)$$

donc la série $\sum v_n$ est à termes positifs et est majorée car la série télescopique $\sum f(n-1) - f(n)$ est convergente donc bornée. Plus précisément, f étant positive, $f(0)$ est un majorant et la suite converge.

2/ On déduit immédiatement que $\sum f(n)$ converge ssi $\left(\int_0^n f(t) dt \right)_n$ converge. Or la fonction f étant positive, l'application $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est croissante, d'où

$$\int_0^{E(x)} f(t) dt \leq \int_0^x f(t) dt \leq \int_0^{E(x)+1} f(t) dt$$

et par encadrement des limites, on a bien $\sum f(n)$ converge ssi $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est convergente.

Pour le 3, la somme des inégalités du 1/ entre 1 et n donne

$$\sum_{k=1}^n v_n = \int_0^n f(t) dt - \sum_{k=1}^n f(k) \leq f(0) - f(n)$$

De plus la fonction est décroissante positive, donc bornée et $f(0) - f(n) = o\left(\sum_{k=1}^n f(k)\right)$. On en déduit que $\int_0^n f(t) dt \sim \sum_{k=1}^n f(k)$.

□

REMARQUE 62 —

1. La fonction f sera parfois définie sur $[a; +\infty[$, le résultat reste le même pour la série $\sum_{n \geq a} u_n$.
2. Si la série converge, alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ et en sommant les inégalités du 1/

$$0 \leq \int_{n-1}^{+\infty} f(t) dt - \sum_{k=n}^{+\infty} f(k) \leq f(n-1).$$

et le plus souvent on a $f(n-1) = o\left(\int_n^{+\infty} f(t) dt\right)$ dont on déduit que $\sum_{k=n}^{+\infty} f(k) \sim \int_n^{+\infty} f(t) dt$.
(par exemple pour les sommes de Riemann ci-dessous)

EXEMPLE 63 —

1. Développement asymptotique de la série harmonique : On applique ce résultat à la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ strictement décroissante :

$$\sum_{k=1}^{n-1} v_n = \int_0^{n-1} f(t) dt - \left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \ln n - \left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) < f(0) = 1$$

converge. On en déduit que la suite

$$\ln n - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) < 0$$

est convergente. Ceci permet d'écrire un développement asymptotique de la série harmonique

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln(n) + \gamma + o(1),$$

où $\gamma > 0$ s'appelle la constante d'Euler.

2. Séries de Bertrand : ce sont les séries de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Si $\alpha < 1$, $\frac{1}{n} = O\left(\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}\right)$, la série diverge car $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

(b) Si $\alpha > 1$, $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} = o\left(\frac{1}{n^{(1+\alpha)/2}}\right)$ et donc converge puisque $\frac{\alpha+1}{2} > 1$.

(c) Si $\alpha = 1$, la série est de même nature que $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^\beta x}$.

Si $\beta \neq 1$, l'intégrande admet pour primitive $\frac{1}{(1-\beta) \ln^{\beta-1} x}$ et donc l'intégrale converge ssi $\beta > 1$.

Si $\beta = 1$, alors l'intégrande admet $\ln \ln x$ comme primitive et l'intégrale est encore divergente.

Conclusion la série converge ssi $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

REMARQUE 64 — Ce que l'on a fait dans le cas $\alpha = 1$ (exemple 63) se généralise aux séries de Riemann avec $f(x) = \frac{1}{(1+x)^\alpha}$ avec $\alpha > 0$ (f doit être décroissante). On a alors pour $\alpha \neq 1$

$$\int_A^B f(t) dt = \left[\frac{1}{(1-\alpha)(1+x)^{\alpha-1}} \right]_A^B$$

1. Si $0 < \alpha < 1$, alors la série $\sum v_n$ du théorème 61 est convergente

$$-\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} - \int_0^{n-1} f(t) dt = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(1-\alpha)} - 1 - \frac{1}{(1-\alpha)n^{\alpha-1}},$$

ce qui montre que si $0 < \alpha < 1$, alors $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(1-\alpha)n^{\alpha-1}}$ car tend vers $+\infty$.

2. Si $\alpha > 1$, on cherche un équivalent du reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$. On somme entre n et N l'inégalité de la preuve 1/ du théorème 61 :

$$0 \leq \int_{n-1}^N f(t) dt - \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(N+1)^\alpha}$$

et en passant à la limite quand $N \rightarrow +\infty$, on obtient :

$$R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

1.4 AUTRES TECHNIQUES

1.4.1 Majoration par une série géométrique

EXEMPLE 65 — Soit $\sum u_n$ la série de terme générale $u_n = \left(\frac{2n+5}{3n+\cos n}\right)^n$.

On remarque que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+5}{3n+\cos n} = \frac{2}{3}$, ce qui montre qu'à partir d'un certain rang $|u_n|^{1/n} \leq \frac{5}{6}$ et donc $|u_n| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$, terme général d'une série géométrique convergente. On en déduit que $\sum u_n$ est absolument convergente.

REMARQUE 66 — Pour étudier la série de terme général $\sum u_n$ il est parfois très efficace de majorer $|u_n|^{1/n}$ par $0 < \alpha < 1$ et de conclure avec $|u_n| \leq \alpha^n$.

1.4.2 Produit de Cauchy

§ 1. Définition et propriétés

DÉFINITION 67

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes complexes. On appelle produit de Cauchy des deux séries la série $\sum c_n$ telle que

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

PROPOSITION 68

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes réels positifs convergentes, alors leur produit de Cauchy de terme général c_n est convergent et

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k.$$

Preuve — On pose $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$. Notons A_n , B_n et C_n les sommes partielles d'indices n des séries $\sum a_n$, $\sum b_n$ et

$\sum c_n$.
Soit la matrice

$$M_n = (a_i \times b_{n-j})_{(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket} = \begin{pmatrix} a_0 b_n & \cdots & \cdots & a_n b_0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_0 b_1 & & \ddots & \vdots \\ a_0 b_0 & a_1 b_0 & \cdots & a_n b_0 \end{pmatrix}.$$

Le produit $A_n \times B_n$ est la somme de tous les coefficients de la matrice M_n et C_n est la somme des $n+1$ diagonales inférieures. On vérifie que

$$\forall n \in \mathbb{N}, C_n \leq A_n B_n \leq C_{2n}$$

En effet, chaque terme de la somme C_n se retrouve dans le produit $A_n B_n$ et chaque terme de la somme développée $A_n B_n$ se retrouve dans C_{2n} .

Donc la série $\sum c_n$ est à termes positifs et majorée par une suite convergente donc converge et

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k \right) \geq \sum_{k=0}^{+\infty} c_k$$

De plus, l'inégalité de droite montre que

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k \right) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} c_k$$

d'où l'égalité. □

PROPOSITION 69

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes complexes absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy est absolument convergent et

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k.$$

Preuve — Il est clair que $|c_n| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| |b_{n-k}|$. D'après la proposition précédente, le produit de Cauchy est absolument convergent. De plus

$$|A_n B_n - C_n| = \left| \sum_J a_k b_{n-k} \right| \leq \sum_J |a_k| |b_{n-k}| = \widetilde{A}_n \widetilde{B}_n - \widetilde{C}_n$$

où $J \subset \mathbb{N}^2$ et $\widetilde{A}_n = \sum_{k=0}^n |a_k|$, $\widetilde{B}_n = \dots$

Le terme de droite tend vers 0 donc on obtient le résultat. □

EXEMPLE 70 — Soit un réel $x \in]-1, +1[$: la série géométrique $\sum x^n$ converge absolument et

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^2} &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right)^2 \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p+q=n} x^p x^q \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n. \end{aligned}$$

REMARQUE 71 — Si les séries ne sont plus absolument convergentes, alors le résultat n'est plus vrai comme

le montre l'exemple suivant : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ est convergente (série alternée) mais son produit de Cauchy avec

lui-même ne l'est pas car alors $c_n = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$ et comme $k(n-k) \leq n^2$, on a $|c_n| \geq \frac{n-1}{n}$ et

donc la série est grossièrement divergente.

Un théorème (totalement hors programme dit que l'on peut se contenter de la convergence absolue de l'une des deux séries, l'autre convergeant simplement).

1.4.3 Utilisation des transformations d'Abel

L'étude des séries est un cas particulier des intégrales. Soit $\sum u_n$ une série. On pose

$$f(t) = \sum_{n \geq 0} u_n \mathbb{1}_{[n, n+1[}.$$

L'intégrale converge (resp. converge absolument) ssi $\int_0^{+\infty} f$ converge (resp. f intégrable sur $[0, +\infty[$).

Cela nous donne de nouvelles perspectives. En particulier l'intégration par parties! Il faut faire alors attention à la dérivation, car f est continue par morceaux non continues.

Les transformations d'Abel pour les séries correspond exactement à l'intégration par parties avec la correspondante sommes discrètes \rightarrow intégrales (sommées continues) : soit une série de la forme $\sum u_n v_n$

(le produit des fonctions), on pose $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$ (l'intégrale de v entre 0 et n), la transformation d'Abel consiste à écrire

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n u_k v_k &= u_0 v_0 + \sum_{k=1}^n u_k (S_k - S_{k-1}) = u_0 v_0 + \sum_{k=1}^n u_k S_k - \sum_{k=1}^n u_k S_{k-1} \\ &= u_n S_n - \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) S_k \end{aligned}$$

la dérivée de u correspondant à la suite $u_k - u_{k-1}$.

PROPOSITION 72

Soit $\sum u_n v_n$ une série de terme général $u_n v_n$ telle que

1. la suite (u_n) est une suite positive décroissante et tend vers 0.
2. la série $\sum v_n$ est bornée.

Alors la série $\sum u_n v_n$ est convergente.

Preuve — On écrit : $\sum_{k=0}^n u_k v_k = u_n S_n - \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) S_k$ et les hypothèses impliquent que $u_n S_n$ tend vers 0. Il faut donc prouver la convergence du second terme ; on montre en fait l'absolue convergence. En effet, l'hypothèse (u_n) décroissante implique que $u_n - u_{n+1} \geq 0$ et si M est un majorant de $|S_n|$ on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} |(u_k - u_{k+1}) S_k| \leq \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) M = (u_0 - u_{n+1}) M$$

ce qui montre que la somme est majorée donc convergente. \square

REMARQUE 73 — Ce résultat n'a d'intérêt que si (v_n) n'est pas de signe constant, sinon, $\sum |v_n|$ bornée donc converge et $|u_n v_n| = o(v_n)$.

EXEMPLE 74 —

1. Le théorème 39 se retrouve facilement car $\sum (-1)^n$ est bornée et $|u_n|$ décroissante tend vers 0.
2. Soit la série de terme général $u_n = \frac{\cos nx}{n \ln n}$, $x \in \mathbb{R}$. Alors pour $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a

$$\left| \sum_{k=0}^n \cos kx \right| = \left| \cos \frac{nx}{2} \times \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}.$$

et $\left(\frac{1}{n \ln n}\right)_{n \geq 1}$ décroissante, positive, tend vers 0. Donc la série $\sum u_n$ converge. La série n'est pas absolument convergente, donc on ne pouvait utiliser le critère de D'Alembert.

REMARQUE 75 — Le changement variables sera rarement efficace (dilaté les segments $[n, n+1]$ compliquera plutôt les choses.

1.5 EN PRATIQUE

Soit $\sum u_n$ une série.

1. On commence par évacuer les cas connus : séries géométriques, télescopiques, alternées.
2. On cherche à prouver l'absolue convergence :
 - (a) $\sum |u_n|$ majorée ?
 - (b) Comparaison $\sum |u_n|$ avec une série connue.
 - (c) Règle de D'Alembert : si $|u_n|$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang !
 - (d) Comparaison série-intégrale.
3. si on est dans le cas limite de D'Alembert :
 - (a) Si $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \geq 1$, la série diverge grossièrement.
 - (b) Calculer un dl de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ d'ordre 1 et essayer la comparaison logarithmique avec $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ (résultats à reprouver !)
4. Rien n'a marché ou encore la série n'est pas absolument convergente :
 - (a) Une transformation d'Abel peut résoudre le problème.
 - (b) Décomposer (u_n) en un terme qui absorbe l'oscillation de signe et un terme qui converge absolument.
 - (c) Faire preuve d'imagination (fatigant).
 - (d) Chercher si la réponse n'est pas dans les questions suivantes, et vite passer à la question d'après.

EXEMPLE 76 — Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites réelles telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour chaque $n \geq 0$. On suppose que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n w_n$ sont convergentes. Démontrer que la série $\sum_n v_n$ est convergente.

1. Pour tout $n \geq N$, on a

$$R_N - R_n = \sum_{k=N+1}^n u_k \leq \sum_{k=N+1}^n v_k \leq \sum_{k=N+1}^n w_k = \tilde{R}_N - \tilde{R}_n$$

avec R_n et \tilde{R}_n les restes d'ordre n des séries $\sum u_n$ et $\sum w_n$.

Les restes R_n et \tilde{R}_n tendent vers 0 : donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N_0 tel que $n \geq N_0$ implique $|R_n| \leq \varepsilon$, $|\tilde{R}_n| \leq \varepsilon$. Pour tout $n > N \geq N_0$

$$|R_n - R_N| \leq |R_n| + |R_N| \leq 2\varepsilon$$

$$|\tilde{R}_n - \tilde{R}_N| \leq |\tilde{R}_n| + |\tilde{R}_N| \leq 2\varepsilon$$

ce qui donne pour tout $n > N \geq N_0$: $-2\varepsilon \leq \sum_{k=N+1}^n v_k \leq 2\varepsilon$.

On comprend alors que le reste de la série $\sum v_k$ tend vers 0, mais pour prouver cela, il faut vérifier que la série est convergente !

2. En posant $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$, on a $n \geq N \geq N_0$,

$$|S_n - S_N| \leq \varepsilon \quad (*)$$

Pour N fixé, on a pour $n > N$,

$$|S_n| \leq 2\varepsilon + |S_N|.$$

La suite (S_n) est donc une suite bornée, on peut en extraire une suite convergente $(S_{\rho(n)})$ de limite notée S . L'inégalité $(*)$ montre alors que

$$|S - S_N| \leq 2\varepsilon$$

et (S_n) converge S .

REMARQUE 77 — Nous avons en fait redémontré un résultat du cours Analyse 1. lequel ?

Chapitre 2 Intégrales généralisées

2.1 INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

2.1.1 Fonctions de classe \mathcal{C}^k par morceaux sur un segment.

DÉFINITION 78

1. Une subdivision de $[a, b]$ est une famille finie $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ avec $a = x_0$, $b = x_n$ et $x_0 < x_1 < \dots < x_n$.
2. On appelle pas de la subdivision le nombre $\max(|x_i - x_{i-1}|, i \in \{1, \dots, n\})$.
3. On dit qu'une subdivision $\sigma' = (x'_0, \dots, x'_m)$ est plus fine que σ , si $\sigma \subset \sigma'$.

EXEMPLE 79 — Soit $[a; b]$ un intervalle de \mathbb{R} . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit la division $\sigma_n = (x_0, \dots, x_n)$ du segment $[a; b]$ en n parties égales :

$$x_k = a + k \times \frac{b - a}{n}.$$

Le pas de ces subdivisions tend vers 0, mais à quelle condition nécessaire et suffisante σ_m est-elle plus fine que σ_n ?

REMARQUE 80 — On a vu que si $f[a, b] : \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe \mathcal{C}^k telle que pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f^{(j)} = l_j$ existe et est finie, alors f se prolonge par continuité en une fonction \tilde{f} de classe \mathcal{C}^k sur $[a, b]$ en posant $\tilde{f}(b) = l_0$ et alors $\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $\tilde{f}^{(j)}(b) = l_j$.

DÉFINITION 81

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Une fonction de classe \mathcal{C}^k par morceaux sur $[a, b]$ est une fonction $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur $[a, b]$ telle qu'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ (dite adaptée à φ) avec $\varphi|_{]x_i, x_{i+1}[}$ se prolonge en une fonction de classe \mathcal{C}^k sur $[x_i, x_{i+1}]$. On note $\varphi \in \mathcal{CM}^k([a, b], \mathbb{R})$.

EXEMPLE 82 —

1. $\varphi : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor \sin x$ est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ par morceaux.
2. $\psi : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x} - E \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ si $x \neq 0$ et 0 sinon est-elle de classe \mathcal{C}^0 par morceaux ?

2.1.2 Intégrale d'une fonction en escalier

DÉFINITION 83

Une fonction en escalier sur $[a, b]$ est une fonction $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur $[a, b]$ telle qu'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ (dite adaptée à φ) avec φ constante sur $]x_i, x_{i+1}[$ pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$ et on note $\varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$.

EXEMPLE 84 — Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. La fonction $1_I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $1_I(x) = 1$ si $x \in I$ et 0 s'appelle fonction caractéristique de l'intervalle I . Toute fonction en escalier réelle est la restriction d'une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'intervalles.

PROPOSITION 85

(et définition) Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ et $\sigma = (x_i)_{i=0 \dots n}$ une subdivision adaptée à φ . Pour tout $i \in \{1, n\}$,

$\forall x \in]x_{i-1}, x_i[$, $\varphi(x) = c_i$.

Alors la somme ci-dessous ne dépend pas de la subdivision et se note

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f = \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1})$$

PROPOSITION 86

L'application $\varphi \mapsto \int_{[a,b]} \varphi$ est linéaire.

PROPOSITION 87

(Relation de Chasles) Soit $c \in]a, b[$ et $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$.

Alors $f|_{[a,c]} \in \mathcal{E}([a, c], \mathbb{R})$ et $f|_{[c,b]} \in \mathcal{E}([c, b], \mathbb{R})$, et

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

PROPOSITION 88

Soit $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$, alors

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$$

Preuve — C'est une conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire.

□

REMARQUE 89 — Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction vectorielle de fonctions coordonnées (f_1, \dots, f_p) rapportées à la base \mathcal{B} de \mathbb{R} . On dit que la fonction f est en escalier (resp. continue par morceaux) si les fonctions coordonnées le sont.

De plus, si f est une fonction en escalier, on pourra poser

$$\int_{[a,b]} f = \left(\int_{[a,b]} f_1, \dots, \int_{[a,b]} f_p \right).$$

PROPOSITION 90

Soit $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{C})$, $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ où $f_1, f_2 \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$. Alors

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} f_1 + i \int_{[a,b]} f_2$$

2.1.3 Intégrale des fonctions continues par morceaux

§ 1. Théorème d'approximation

THÉORÈME 91

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$. Alors f est limite uniforme de fonctions en escalier : $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ telle que

$$\sup_{[a,b]} |f - \varphi| \leq \varepsilon.$$

Preuve — Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$.

1. On peut supposer f continue, quitte à prendre un segment plus petit.
2. Si $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ est une subdivision de $[a, b]$ et $\alpha_i \in [x_{i-1}, x_i]$

$$f_\sigma = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) 1_{[x_{i-1}, x_i[}$$

est une fonction en escalier et sur chaque palier elle est une approximation de f par la fonction constante $f(\alpha_i)$.

3. Si l'on suppose que la subdivision devient de plus en plus fine, alors meilleure devrait être l'approximation de f par f_σ .
4. D'après le théorème de Heine, f est continue sur $[a, b]$ est uniformément continue :

$$\varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in [a, b], |x - y| \leq \delta, |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Donc si le pas de la subdivision $\max(x_i - x_{i-1}) \leq \delta$, alors

$$|f - f_\sigma| \leq \sum_{i=1}^n |f(x) - f(\alpha_i) 1_{[x_{i-1}; x_i]}(x)| \leq \varepsilon$$

la fonction f_σ convient : c'est l'uniforme continuité qui permet de conclure. □

§ 2. Définition

THÉORÈME 92

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$.

Les ensembles

$$A = \left\{ \int_a^b \varphi(t) dt \mid \varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), \forall t \in [a, b] \varphi(t) \leq f(t) \right\}$$

et

$$B = \left\{ \int_a^b \varphi(t) dt \mid \varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), \forall t \in [a, b] \varphi(t) \geq f(t) \right\}$$

vérifient $\sup A = \inf B$.

Ceci nous permet de poser

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f = \int_a^b f(t) dt = \sup A = \inf B.$$

REMARQUE 93 — Cette définition prolonge l'intégrale des fonctions en escalier dans la mesure où si $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$, alors avec les notations ci dessus $f \in A \cap B$.

2.1.4 Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux

PROPOSITION 94

(Relation de Chasles) Soit $c \in]a, b[$ et $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$.

Alors $f|_{[a,c]} \in \mathcal{E}([a, c], \mathbb{R})$ et $f|_{[c,b]} \in \mathcal{E}([c, b], \mathbb{R})$, et

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

PROPOSITION 95

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$, alors

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f| \leq \sup_{[a,b]} |f| (b - a)$$

Preuve — L'inégalité est vraie pour φ fonction en escalier. □

PROPOSITION 96

(Invariance de l'intégrale par translation) Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ et la translation $t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + \alpha$, alors $f \circ t \in \mathcal{CM}([a - \alpha, b - \alpha], \mathbb{R})$ et

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a-\alpha, b-\alpha]} f \circ t$$

Preuve — L'égalité est vraie pour les fonctions en escalier. □

PROPOSITION 97

$\psi : \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}), f \mapsto \int_a^b f$ est une application linéaire.

Preuve — Cette propriété est vraie pour les fonctions en escalier. □

PROPOSITION 98

Si f et g sont deux applications continues par morceaux sur $[a, b]$ coïncident sauf en un nombre fini de points, alors leur intégrale sont égales.

Preuve — On prend une subdivision adaptée qui contient tous les points où f et g sont distincts. □

PROPOSITION 99

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ et $J \subset [a, b]$ un segment, alors

$$\int_J f|_J = \int_{[a,b]} f \times 1_J,$$

où $1_J(x) = 1$ si $x \in J$ et 0 sinon.

REMARQUE 100 — On écrira $\int_{[a,b]} f = \int_a^b f(t) dt$ et si $a \leq b$, on pose $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$. On a encore la relation de Chasles dans ce cas.

REMARQUE 101 — Comme dans la remarque 89, si $f : I \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction continue par morceaux de fonctions coordonnées (f_1, \dots, f_p) rapportées à la base \mathcal{B} de \mathbb{R} , alors

$$\int_{[a,b]} f = \left(\int_{[a,b]} f_1, \dots, \int_{[a,b]} f_p \right).$$

PROPOSITION 102

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$, $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ où $f_1, f_2 \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$. Alors

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} f_1 + i \int_{[a,b]} f_2$$

PROPOSITION 103

1. Si $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ et si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f \geq 0$
2. Si $f, g \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ et si $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

LEMME 104

Si f est continue sur $[a; b]$ positive et d'intégrale nulle, alors f est la fonction nulle.

Preuve — Si f ne s'annule pas en un point c , alors la continuité implique qu'il existe un intervalle I' assez petit de longueur ε tel que $\forall x \in I', f(x) > \frac{f(c)}{2}$. On conclut en remarquant que

$$\int_a^b f = \int_a^b (1 - 1_{I'})f + \int_a^b 1_{I'}f \geq \int_a^b (1 - 1_{I'})f + \varepsilon \frac{f(c)}{2} \geq \frac{f(c)}{2} \varepsilon > 0.$$

□

PROPOSITION 105

(Égalité de la moyenne) Si $(f, g) \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \times \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}_+)$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_{[a,b]} f \times g = f(c) \int_{[a,b]} g.$$

Preuve — Comme $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, alors f est bornée et atteint ses bornes. Soit $m = \inf_{[a, b]} f = f(x_1)$, et $M = \sup_{[a, b]} f = f(x_2)$, alors comme $g \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq M g(x)$$

et en intégrant, on a

$$m \int_{[a, b]} g \leq \int_{[a, b]} f \times g \leq M \int_{[a, b]} g$$

et donc il existe $\alpha \in [m, M]$ tel que $\int_{[a, b]} f \times g = \alpha \int_{[a, b]} g$; le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence de c tel que $f(c) = \alpha$ et la preuve est terminée. \square

PROPOSITION 106

(Inégalité de la moyenne) Si $f, g \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$, alors

$$\left| \int_a^b f \times g \right| \leq \sup_{[a, b]} |f| \int_{[a, b]} |g|.$$

Preuve — Si $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$, alors f est bornée. Soit donc $M = \sup_{[a, b]} |f|$, alors sur $[a, b]$, on a $|f \times g| \leq M |g|$, d'où $\left| \int_a^b f \times g \right| \leq \int_a^b |f \times g| \leq M \int_a^b |g|$. La propriété est encore vraie pour g est une fonction vectorielle. \square

PROPOSITION 107

(Inégalité de Cauchy - Schwarz) Soient $f, g \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$, alors

$$\left| \int_a^b f \times g \right|^2 \leq \left(\int_a^b |f|^2 \right) \left(\int_a^b |g|^2 \right).$$

De plus, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si f et g sont continues, alors on a égalité si et seulement si f et g sont proportionnels.

Preuve — Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors on utilise $\left| \int_a^b f \times g \right| \leq \int_a^b |f \times g|$ \square

2.1.5 Primitive et intégrale

§ 1. Primitives Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

DÉFINITION 108

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, on dit que F est une primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I et $F' = f$.

PROPOSITION 109

Si f admet une primitive F sur I , alors l'ensemble \mathcal{P} des primitives de f sur I est le sous-espace affine $\mathcal{P} = \{G = F + a ; a \in \mathbb{K}\}$.

Preuve — Soit F une primitive de f , alors $F + a \in \mathcal{P}$ car $F + a$ est dérivable de dérivée f . Réciproquement, si G est une primitive de f , alors $F - G$ est dérivable de dérivée nulle donc est constante $= a$ sur l'intervalle I de \mathbb{R} . \square

§ 2. Lien entre primitives et intégrale de f

THÉORÈME 110

Soit I un intervalle. Si $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$, alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ définit une fonction F sur I qui est dérivable de dérivée égale à f (bref : F est une primitive de f)

COROLLAIRE 111

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

PROPOSITION 112

Plus précisément, $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

REMARQUE 113 — Ce résultat est faux si on suppose seulement f continue par morceaux sur I ; par exemple, $x \mapsto [x]$ est continue par morceaux sur $[0, 2]$, $x \mapsto \int_0^x [t] dt$ n'est pas dérivable en 1, donc n'est pas une primitive de $x \mapsto [x]$ sur $[0, 2]$. (faire un dessin)

PROPOSITION 114

Soit I un intervalle. Si $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$, alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ définit une fonction F continue sur I

Preuve — On montre qu'elle est lipschitzienne sur tout segment $J = [c, d]$ inclus dans I . On pose $K = \sup_J |f| : \|(x_1, \dots, x_n)\| = \sup(|x_1|, \dots, |x_n|)$. K est bien définie car une fonction réelle continue par morceaux est bornée.

$$\forall x, y \in [c, d], \left| \int_c^x f - \int_c^y f \right| \leq \left| \int_x^y |f| \right| \leq K|x - y|$$

□

PROPOSITION 115

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et $a, b \in I$. Alors f admet des primitives et si F est l'une d'elles, alors

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Preuve — Soit $G : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$, alors $G(a) = 0$ et $G(b) = \int_a^b f(t) dt$, de plus, F et G sont deux primitives de f , donc $\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad F = G + \lambda$ et donc $\lambda = F(a)$, d'où $F(b) = G(b) + F(a)$, soit $G(b) = F(b) - F(a)$, c'est-à-dire $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. □

REMARQUE 116 — On note $\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

COROLLAIRE 117

Si $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, alors $\forall a, x \in I$

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt$$

REMARQUE 118 — On en déduit une autre preuve de la propriété : $\int_a^b f(t) dt = 0$ et $f \geq 0$ continue, alors $f = 0$. En effet $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est dérivable de dérivée positive. Donc la fonction F est croissante et par hypothèse $F(a) = F(b) = 0$. La fonction F est la fonction nulle et $F' = f = 0$.

2.1.6 Méthodes de calcul d'intégrales

§ 1. Intégration par parties

PROPOSITION 119

Soient $u : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$.

Alors

$$\int_a^b u'v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b uv'(t) dt$$

Preuve — Cela provient de la linéarité de l'intégrale et de la formule $(uv)' = u'v + uv'$. □

REMARQUE 120 — La proposition est encore vraie si u et v sont continues de classe \mathcal{C}^1 par morceaux : il suffit de se placer sur une subdivision adaptée et d'utiliser la relation Chasles.

EXEMPLE 121 —

1. Recherche d'une primitive d'un produit dont un des termes se simplifie en dérivant :

$$\begin{aligned} \int_0^x \arctan t \, dt &= [t \arctan t]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2} \, dt \\ &= x \arctan x - \left[\frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) \right]_0^x \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \end{aligned}$$

2. On prouve la formule de Taylor Lagrange avec reste intégrale : soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ (ou $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, f de classe \mathcal{C}^{n+1} par morceaux) et soit $a, x \in I$ (on ne suppose pas $a \leq b$) :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

En effet, si f est continue, \mathcal{C}^1 par morceaux de subdivision adaptée (x_0, \dots, x_n)

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(t) dt = \int_a^x f'(t) dt$$

Puis on fait une récurrence sur n : dans le terme intégrale sur une division adaptée si nécessaire on dérive $f^{(n+1)}(t)$ et on intègre $\frac{(x-t)^n}{n!}$. L'hypothèse de classe $\mathcal{C}^{(n+2)}$ par morceaux assure que $f^{(n+2)}$ est continue sur chaque intervalle de la subdivision, donc intégrable :

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt &= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \\ &= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \end{aligned}$$

d'où le résultat.

On en déduit l'inégalité de Taylor Lagrange vectorielle.

§ 2. Changement de variables

PROPOSITION 122

(Version continue) Soient I et J des intervalles de \mathbb{R} ; $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, I)$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$

$$\forall \alpha, \beta \in J \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u)) \varphi'(u) \, du = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) \, dt.$$

Preuve — Comme f est continue sur I elle admet une primitive F sur I qui est de classe \mathcal{C}^1 donc

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) \, dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)).$$

De plus, $f \circ \varphi \times \varphi' = (F \circ \varphi)'$, avec $F \circ \varphi$ de classe \mathcal{C}^1 sur J , donc

$$\int_{\alpha}^{\beta} f \circ \varphi(u) \varphi'(u) \, du = [F \circ \varphi(u)]_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)),$$

d'où l'égalité. □

PROPOSITION 123

(Version continue par morceaux) Soient I et J des intervalles de \mathbb{R} ; $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, I)$ strictement monotone et $f \in \mathcal{CM}^0(I, \mathbb{R})$.

$$\forall \alpha, \beta \in J \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u)) \varphi'(u) \, du = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) \, dt.$$

Preuve — L'hypothèse strictement monotone assure que φ est un homéomorphisme de J sur son image $\subset J$ et donc si (x_0, \dots, x_n) est une subdivision adaptée pour f sur $\varphi([\alpha, \beta])$, alors en posant $y_i = \varphi^{-1}(x_i)$, alors (y_0, \dots, y_n) (resp. (y_n, \dots, y_0)) est une subdivision de $[\alpha, \beta]$ si φ est croissante (resp. décroissante). On applique alors la version continue sur chaque intervalle de la subdivision en se rappelant qu'alors f se prolonge bien en une fonction continue sur l'intervalle fermé : dans le cas φ croissante on obtient

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{y_i}^{y_{i+1}} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt.$$

□

EXEMPLE 124 — Pour calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^3 x dx$, on pose $u = \cos x$, mais $u \mapsto \arccos u$ n'est pas de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; 1]$ car la fonction \arccos n'est pas dérivable en 1. Mais $u = \cos x$ est bien un changement de variables de classe \mathcal{C}^1 dans

$$\int_0^1 u^2(1-u^2) du = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 x \sin^2 x (-\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^3 x dx$$

REMARQUE 125 — La fonction φ n'a pas besoin d'être bijective : ici $u = \sin t$

$$\int_0^{2\pi} \cos t dt = \int_0^0 du = 0.$$

Mais il faut être soigneux : pour calculer $\int_0^3 (x-1)^2 dx$, on pose $u = (x-1)^2$, dont on déduit $x = 1 + \sqrt{u}$ et ainsi $dx = \frac{du}{2\sqrt{u}}$. Finalement

$$\int_0^3 (x-1)^2 dx = \int_1^4 \frac{\sqrt{u}}{2} du = \left[\frac{1}{3} u^{3/2} \right]_1^4 = \frac{7}{3}.$$

Et pourtant

$$\int_0^3 (x-1)^2 dx = \left[\frac{(x-1)^3}{3} \right]_0^3 = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 3.$$

Ce genre de problème n'arrivera pas si φ est bijective.

§ 3. Quelques exemples

EXEMPLE 126 —

1. On a $\frac{4x+1}{x^2+x-2} = \frac{4x+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{5/3}{x-1} + \frac{7/3}{x+2}$, donc

$$\int \frac{4x+1}{x^2+x-2} dx = \frac{5}{3} \int \frac{1}{x-1} + \frac{7}{3} \int \frac{1}{x+2} dx = \frac{5}{3} \ln|x-1| + \frac{7}{3} \ln|x+2| + C$$

2. On a $\frac{x+2}{x^2+2x+1} = \frac{x+2}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$, donc

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x+1} = \int \frac{1}{x+1} + \int \frac{1}{(x+1)^2} = \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + C.$$

3. On a $\frac{4x+1}{x^2+x+1} = 2 \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{x^2+x+1} = 2 \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$, donc

$$\int \frac{4x+1}{x^2+x+1} dx = 2 \ln|x^2+x+1| - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

PROPOSITION 127

Si $\alpha \in \mathbb{C}^*$, et si $P \in \mathbb{C}[X]$, alors $x \mapsto P(x)e^{\alpha x}$ possède une primitive de la forme $x \mapsto Q(x)e^{\alpha x} + \text{constante}$, où Q est un polynôme de même degré que P .

EXEMPLE 128 — Primitive de $(x^2 + x + 1)e^x$.

EXEMPLE 129 — Pour calculer $\int \cos^n x \sin^m x dx$. Deux cas se présentent

1. Si n ou m est impair (par exemple $n = 2p + 1$). Alors

$$\int \cos^n x \sin^m x dx = \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^p \cos x dx,$$

on fait le changement de variable $t = \sin x$ pour se ramener au calcul (facile) de $\int t^m (1 - t^2)^p dt$.

2. Si m et n sont pairs, on linéarise les fonctions $\cos^n x$ et $\sin^m x$ (souvent calculatoire).

EXEMPLE 130 —

1. $\int \cos^3 x \sin^3 x dx = \int \cos^3 x \sin^2 x \sin x dx = \int \cos^3 (1 - \cos^2 x) \sin x dx = \frac{-1}{4} \cos^4 x + \frac{1}{6} \cos^6 x + C.$
2. $\int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$

On veut calculer une primitive d'une fonction de la forme $R(\sin x, \cos x)$ où R est une fraction rationnelle en deux variables.

On s'en sort toujours en effectuant le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$. On sait alors que

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad dt = (1+t^2) \frac{dx}{2}.$$

On est ramené à calculer la primitive d'une fonction rationnelle $\int R\left(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}$. Cependant, il faut faire attention à ce que $t = \tan \frac{x}{2}$ est bien bijectif sur l'intervalle à considérer. De plus, les calculs peuvent être lourds.

EXEMPLE 131 — On calcule $\int \frac{1}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2}{(1+t^2)} dt = \ln |\tan \frac{x}{2}| + C$ pour $x \in]0; \pi[$ (le changement de variable est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $[a; b] \subset]0; \pi[$ sur son image).

REMARQUE 132 — Règles de Bioche pour les fractions rationnelles en \sin, \cos Pour trouver le bon changement de variable : le bon changement de variable :

1. Si $R(\sin x, \cos x) dx$ est invariant par le changement $x \mapsto \pi - x$, on posera $t = \sin x$
2. Si $R(\sin x, \cos x) dx$ est invariant par le changement $x \mapsto -x$, on posera $t = \cos x$
3. Si $R(\sin x, \cos x) dx$ est invariant par le changement $x \mapsto \pi + x$, on posera $t = \tan x$

Ne pas oublier que dx fait partie de l'expression qui doit rester invariante...

EXEMPLE 133 — $\int \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx = \cos x - 2 \arctan(\cos x) + cste$. On remarque en effet que l'expression sous l'intégrale est invariante par $x \mapsto -x$, et on pose $t = \cos x$. Le calcul devient

$$\int \frac{1-t^2}{1+t^2} (-dt) = \int \left(1 - \frac{2}{1+t^2}\right) dt = t - 2 \arctan t + cste$$

2.2 DÉFINITIONS ET EXEMPLES D'INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

2.2.1 Définitions

Soit I un intervalle de \mathbb{R} non vide non réduit à un point.

DÉFINITION 134

Une fonction continue (resp. de classe \mathcal{C}^k , $k \in \mathbb{N}$) par morceaux sur I est une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}$ telle que pour tout segment $[a, b] \subset I$, $a < b$, la restriction de φ à $[a, b]$ est continue (resp. de classe \mathcal{C}^k) par morceaux. On note encore $f \in \mathcal{CM}^k(I, \mathbb{K})$.

REMARQUE 135 —

1. Une fonction continue par morceaux sur un segment au sens du chapitre précédent est encore continue par morceaux au sens ci-dessus.
2. Une fonction continue par morceaux sur I est donc intégrable sur tout segment $[a, b] \subset I$.
3. La fonction définie par $0 \mapsto 0$, $x \mapsto xE\left(\frac{1}{x}\right)$ sinon, n'est pas continue par morceaux sur $]0, 1[$ avec la première définition, mais l'est avec la seconde sur $]0, 1[$.
4. De même, on fera attention : $x \mapsto 0$ si $x \in [-1, 0]$, et $x \mapsto xE\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $]0, 1[$ sont deux fonctions continues par morceaux. La fonction obtenue sur $[-1, 1]$ ne l'est plus.

DÉFINITION 136

Si $I = [a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$. Soit $f : [a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et soit $F : [a; b[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$. On dit que l'intégrale impropre ou généralisée $\int_a^b f$ est convergente sur $[a; b[$, si $\lim_b F$ existe et vaut $l \in \mathbb{K}$. On note alors

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt.$$

Dans le cas où la limite n'existe pas, on dit que l'intégrale $\int_a^b f$ est divergente.

DÉFINITION 137

1. On définit de même pour f continue par morceaux sur $]a, b]$ $-\infty \leq a < b < +\infty$

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt.$$

2. Si f est continue par morceaux sur $]a, b[$ $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, on dit que l'intégrale $\int_a^b f$ est convergente si pour $c \in]a, b[$, $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ sont convergentes et on note

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt,$$

la valeur ne dépendant pas du point c (appliquer la relation de Chasles).

REMARQUE 138 —

1. Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$, alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est continue, donc $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x) = F(b)$, ce qui assure la cohérence avec l'intégrale sur un segment.
2. $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^{+a} f(t) dt$ peut exister sans que l'intégrale de f sur \mathbb{R} soit convergente. Par exemple si $f(t) = t$ ou plus généralement n'importe quelle fonction impaire.
3. Si f est continue par morceaux sur $]a, b[$, il suffit que $\int_a^c f(t) dt$ ou $\int_c^b f(t) dt$ diverge pour que $\int_a^b f(t) dt$ diverge.
4. Si $f \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = l \in \mathbb{R}$ et $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ existe, alors $l = 0$. En effet, on se ramène à $l \in \mathbb{R}$ en prenant la partie réelle et imaginaire puis $\left| \int_n^{n+1} f(t) dt \right|$ tend vers 0, or si

$l \neq 0$, pour n assez grand f est de signe constant et

$$\left| \int_n^{n+1} f(t) dt \right| = \int_n^{n+1} |f(t)| dt \geq \inf_{[n, n+1]} |f(t)| \geq \frac{|l|}{2}$$

ce qui est absurde, d'où la conclusion.

2.2.2 Exemples

EXEMPLE 139 —

1. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.
2. $\int_0^1 \ln t dt = -1 - \lim_{t \rightarrow 0^+} (t \ln t - t) = -1$
3. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2$.
4. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

THÉORÈME 140

(Intégrales de Riemann) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et

$$f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$$

1. $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est convergente ssi $\alpha > 1$ et alors

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha - 1}$$

2. $\int_0^1 f(t) dt$ est convergente ssi $\alpha < 1$ et alors

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dt = \frac{1}{1 - \alpha}$$

Preuve — On sait que si $\alpha \neq 1$ une primitive de f est $\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$, le reste s'en déduit immédiatement. □

REMARQUE 141 — L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dt$ n'est jamais convergente.

EXEMPLE 142 — Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ et F sa primitive qui s'annule en 0.

1. L'intégrale $\int_0^{+\infty} (f(t+1) - f(t)) dt = l - F(1)$.
2. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} (\arctan(x+1) - \arctan(x)) dx$ est convergente et vaut π .

1/ En effet, si F est la primitive de f sur s 'annule en 0

$$\int_0^x f(t+1) - f(t) dt = F(x+1) - F(x) - F(1)$$

et le théorème des accroissements nous dit que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ il existe $c_x \in [x, x+1]$ tel que $F(x+1) - F(x) = f(c_x)$ et c_x tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, d'où la conclusion.

2/ On applique le résultat sur $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$.

2.2.3 Fonctions à valeurs positives

REMARQUE 143 — Soit $f \in \mathcal{CM}(]a, b[, \mathbb{R}_+)$, alors pour tout $c \in I$, $F(x) = \int_c^x f(t) dt$ est croissante. Or toute fonction croissante admet une limite à gauche en b (resp. à droite en a) ssi F est majorée au voisinage de b (resp. minorée au voisinage de a)

PROPOSITION 144

Soit f continue par morceaux sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$) à valeurs positives et $c \in]a, b[$. Alors $\int_a^b f(t) dt$ est convergente ssi $x \mapsto \int_c^x f(t) dt$ est majorée (resp. minorée)

COROLLAIRE 145

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$ à valeurs positives telles que $f \leq g$.

1. Si $\int_a^b g(t) dt$ converge, alors $\int_a^b f(t) dt$ aussi et $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.
2. Si $\int_a^b f(t) dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t) dt$ aussi.

REMARQUE 146 — Soit f continue positive par morceaux sur I telle que $\int_I f$ converge. Pour tout segment $J \subset I$, on a

$$\int_I f \geq \int_I f \times 1_J = \int_J f.$$

On en déduit la proposition suivante :

PROPOSITION 147

Si f est une fonction continue à valeurs positives sur I et telle que $\int_I f$ est convergente et vaut 0, alors f est la fonction nulle.

Preuve — La proposition est vraie pour I segment et pour tout $x \in I$ il existe un segment J qui contient x et on applique la remarque précédente. \square

THÉORÈME 148

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$ à valeurs positives

1. Si $f = O_b(g)$, alors

(a) La convergence de $\int_a^b g(t) dt$ implique celle de $\int_a^b f(t) dt$ et

$$\int_x^b f(t) dt = O\left(\int_x^b g(t) dt\right)$$

(b) La divergence de $\int_a^b f(t) dt$ implique celle de $\int_a^b g(t) dt$ et

$$\int_a^x f(t) dt = O\left(\int_a^x g(t) dt\right)$$

2. Si $f = o_b(g)$, alors

(a) La convergence de $\int_a^b g(t) dt$ implique celle de $\int_a^b f(t) dt$ et

$$\int_x^b f(t) dt = o\left(\int_x^b g(t) dt\right)$$

(b) La divergence de $\int_a^b f(t)dt$ implique celle de $\int_a^b g(t)dt$ et

$$\int_a^x f(t)dt = o\left(\int_a^x g(t)dt\right)$$

3. Si $f \sim_b g$, alors $\int_a^b g(t)dt$ et $\int_a^b f(t)dt$ sont de même nature et

(a) dans le cas où elles convergent

$$\int_x^b f(t)dt \sim_b \int_x^b g(t)dt$$

(b) Dans le cas où elles divergent

$$\int_a^x f(t)dt \sim_b \int_a^x g(t)dt$$

Preuve — On rappelle que

1. $f =_b o(g)$ si pour tout ε , il existe un voisinage $V =]c, b[$ de b , $\forall x \in V$, $0 \leq f(x) \leq \varepsilon g(x)$.
2. $f = O_b(g)$ s'il existe une $A \in \mathbb{K}$ telle que sur un voisinage $V =]c, b[$ de b , $\forall x \in V$, $0 \leq f(x) \leq Ag(x)$.
3. $f \sim_b g$ si $f - g =_b o(f)$ (ou $o(g)$).

Si $f =_b o(g)$ et $\varepsilon > 0$, on choisit un voisinage :

$$\forall t \in [c, b[, f(t) \leq \varepsilon g(t).$$

Si l'intégrale de g sur $[a, b[$ converge, alors l'intégrale de f existe sur $[a, c]$ (intégrale sur un segment) et sur $[c, b[$ car majorée par εg . De plus,

$$\forall x \in [c, b[, 0 \leq \int_x^b f(t)dt \leq \varepsilon \int_x^b g(t)dt,$$

ce qui montre le résultat.

Si l'intégrale de f diverge, alors $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t)dt = +\infty$ et comme

$$\forall x \in [c, b[, 0 \leq \int_c^x f(t)dt \leq \varepsilon \int_c^x g(t)dt,$$

il en est de même pour g et

$$\int_c^x f(t)dt = o\left(\int_c^x g(t)dt\right).$$

Et comme $\int_a^c f(t)dt$ (nombre fini) est négligeable devant $\int_c^x g(t)dt$ (qui tend vers $+\infty$), on en déduit le résultat attendu.

Si $f = O(g)$, la preuve est identique, en remplaçant ε par A .

Si $f \sim_b g$, alors $f = O_b(g)$ et $g = O_b(f)$ donc les deux intégrales sont de même nature. De plus, comme $|f(t) - g(t)| = o(g)$, on peut appliquer le résultat précédent et on obtient les équivalences souhaitées. \square

EXEMPLE 149 — L'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin t}{t^2} dt$ est divergente car $\frac{\sin t}{t^2} \sim_0 \frac{1}{t}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ diverge (les fonctions sont positives). Pour trouver un équivalent de $\int_x^1 \frac{\sin t}{t^2} dt$ en 0, on écrit un dl en 0 :

$$\frac{\sin t}{t^2} = \frac{1}{t} + O(1) \Rightarrow \int_x^1 \frac{\sin t}{t^2} dt = \int_x^1 \frac{1}{t} dt + \int_x^1 g(t) dt$$

avec $g(t) = O(1)$ bornée sur $[0, 1]$ d'où $\int_x^1 \frac{\sin t}{t^2} dt \sim_0 -\ln x$.

REMARQUE 150 — On appliquera souvent la comparaison aux intégrales de Riemann. Rappelons que les intégrales de Bertrand

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} dx = \int_2^{+\infty} f(x) dx$$

convergent ssi $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

En effet si $\alpha < 1$, alors $\frac{1}{x} =_{+\infty} o(f)$ et donc l'intégrale diverge.

Si $\alpha > 1$, $f(x) =_{+\infty} o\left(\frac{1}{x^{(1+\alpha)/2}}\right)$. On conclut par comparaison avec une intégrale de Riemann.

Si $\alpha = 1$ et $\beta \neq 1$, une primitive de f est $\frac{1}{(1-\beta)\ln^{\beta-1}x}$ admet une limite finie en $+\infty$ ssi $\beta > 1$.

Enfin, si $\alpha = \beta = 1$, la primitive de f vaut $\ln(\ln x)$ qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
Ce résultat doit être connu par cœur.

EXEMPLE 151 —

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx & B &= \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t} dt & C &= \int_0^1 \frac{e^{\sin t}}{t} dt \\ D &= \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^3+1}} & E &= \int_0^1 \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt & F &= \int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt \\ G &= \int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx & H &= \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx & I &= \int_7^{+\infty} e^{-x} \ln(x) dx \\ J &= \int_0^7 e^{-x} \ln(x) dx & K &= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[3]{1-t^3}} \end{aligned}$$

et $L = \int_0^{+\infty} (x+2 - \sqrt{x^2+4x+1}) dx$.

2.2.4 Intégrales absolument convergentes, fonctions intégrables

DÉFINITION 152

On dit qu'une fonction continue par morceaux $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ a une intégrale absolument convergente ou est intégrable sur I si l'intégrale $\int_I |f|$ est convergente.

On dit que l'intégrale de f sur I est semi-convergente, si l'intégrale de f sur I est convergente non absolument convergente.

PROPOSITION 153

Une fonction continue par morceaux $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable ssi il existe M tel que pour tout segment $J \subset I$

$$\int_J |f(t)| dt \leq M$$

et alors $\int_I |f| = \sup_{J \subset I, \text{ segment}} \int_J |f(t)|$.

Preuve — \Rightarrow : Si (x_n) décroissante et (y_n) croissante sont deux suites d'éléments de I qui convergent vers les extrémités de I , alors la limite croissante (dont l'existence est assurée puisque f est intégrable) donne

$$\lim \int_{[x_n, y_n]} f(t) dt = \int_I f,$$

donc $\int_I |f| \leq \sup_{J \subset I, \text{ segment}} \int_J |f(t)|$.

De plus, on a vu pour les fonctions positives que pour tout segment $J \subset I$, $\int_I |f| \geq \int_J |f(t)| dt$.

Par double inégalité, on a montré le résultat.

\Leftarrow : Pour c fixé, l'application $x \mapsto \int_c^x |f(t)| dt$ est croissante bornée par M , donc elle admet des limites aux bornes de l'intervalle I : l'intégrale est convergente. Et l'égalité provient de la première partie. \square

EXEMPLE 154 —

1. La fonction $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\sin \pi x}{E(x)}$ est continue et

$$\int_n^{n+1} f(t) dt = \frac{1}{n} \int_n^{n+1} \sin(\pi t) dt = \frac{1}{n} \left[-\frac{\cos(\pi x)}{\pi} \right]_n^{n+1} = \frac{(-1)^n \times 2}{\pi n}$$

et donc l'intégrale n'est pas absolument convergente mais est semi-convergente car

$$\left| \int_1^x f(t) dt - \int_1^{E(x)} f(t) dt \right| = \left| \int_1^x f(t) dt - 2 \sum_{k=1}^{E(x)} \frac{(-1)^k}{\pi k} \right| = \left| \int_{E(x)}^x f(t) dt \right| \leq \int_{E(x)}^x |f(t)| dt \leq \frac{1}{E(x)}$$

La série est convergente et $\frac{1}{E(x)}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

2. La fonction $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin x}{x^\alpha}$, avec $\alpha > 1$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car est continue et $\left| \frac{\sin x}{t^\alpha} \right| \leq \frac{1}{t^\alpha}$ qui est intégrable.

PROPOSITION 155

Si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est intégrable, alors $\int_I f$ est convergente et

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|.$$

Preuve — On traite d'abord le cas réel : $g = |f| - f$ est une fonction positive et est majorée par $2|f|$ qui est d'intégrale convergente, donc est d'intégrale convergente. On en déduit que l'intégrale de $f = |f| - g$ est convergente.

Si $f = g + ih$ est complexe, on a $|g| \leq |f|$ et $|h| \leq |f|$, donc les g et h sont d'intégrale convergente, donc il en est de même pour f . □

COROLLAIRE 156

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux et $g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}_+$ et g intégrable sur $[a, b[$. Si $|f| \leq g$ ou $|f| \sim_b g$, alors f l'est.

EXEMPLE 157 — La fonction $[1, +\infty[, x \mapsto \frac{e^{ix}}{x^2}$ est intégrable.

2.3 PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE

2.3.1 Propriétés élémentaires

PROPOSITION 158

Si les intégrales de f et g , des fonctions continues par morceaux de I dans \mathbb{K} sont convergentes, alors les intégrales de \bar{f} et $\lambda f + \mu g$ le sont aussi et

$$\int_I \bar{f} = \overline{\int_I f} \text{ et } \int_I \lambda f + \mu g = \lambda \int_I f + \mu \int_I g$$

Preuve — La preuve est élémentaire. □

PROPOSITION 159

(Relation de Chasles) Si l'intégrale de f continue par morceaux sur $]a, b[$ est convergente, alors pour tout $c \in]a, b[$ les intégrales de f sur $]a, c[$ et sur $]c, b[$ sont convergentes et

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$$

Preuve — La preuve est élémentaire, mais notez que que les intégrales sur $]a, c[$ et $]c, b[$ peuvent exister sans que l'intégrale sur $]a, b[$ le soit ! La fonction $t \mapsto t$ est intégrable sur $[-1, 0]$ et $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ l'est sur $]0, 1]$, mais a priori la fonction ainsi définie sur $[-1, 1]$ n'est pas continue par morceaux. □

PROPOSITION 160

(Inégalité de la moyenne) Soit f intégrable sur I et g continue par morceaux et bornée sur I . Alors fg est intégrable sur I et

$$\left| \int_I fg \right| \leq \sup_I |g| \int_I |f|$$

Preuve — On a $\int_{J \subset I} |fg| \leq \sup_I |g| \int_I |f|$, donc fg est intégrable et l'inégalité sur les intégrales est immédiat. \square

PROPOSITION 161

(Changement de variables) Soit f continue sur $]a, b[$ et $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ une application bijective strictement monotone de classe \mathcal{C}^1 , alors $\int_a^b f(x) dx$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$ sont de même nature et en cas de convergence elles sont égales

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Preuve — Soit F est une primitive de f sur $]a, b[$, on a

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b} F(x) - \lim_{y \rightarrow a} F(y)$$

et

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \lim_{y \rightarrow \beta} F(\varphi(y)) - \lim_{y \rightarrow \alpha} F(\varphi(y)).$$

Ces limites existent dans le premier cas ssi elles existent dans le second et alors on a bien égalité. Si φ est décroissante, $\varphi' \leq 0$ et $\varphi(\alpha) = b$ et $\varphi(\beta) = a$, il faut faire attention bien placer les bornes d'intégration. \square

EXEMPLE 162 —

1. Prouver la convergence et calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin(t) dt$: on pose

$$f(t) = \ln \sin t = \ln \left(\frac{\sin t}{t} \right) + \ln t.$$

la première fonction se prolonge en une fonction continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et la seconde est intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ comme fonction de référence. On en déduit que l'intégrale est convergente.

On fait le changement de variables affine $u = \frac{\pi}{2} - x$ qui nous donne

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos(u) du$$

et donc

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(\frac{\sin(2t)}{2} \right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin(2t) dt - \frac{\pi}{2} \ln(2) = I - \frac{\pi}{2} \ln(2),$$

d'où $I = -\frac{\pi}{2} \ln 2$.

2. Justifier la convergence puis calculer l'intégrale $I = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{(t-1)\sqrt{t}} = \int_2^{+\infty} f(t)dt$.

La fonction f est positive et continue sur $[2, +\infty[$. $f \sim_{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}}$ qui est convergente, d'où la convergence de I .

On pose $t = u^2$ changement de variables de classe \mathcal{C}^1 bijectif :

$$I = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2 du}{u^2 - 1} = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \left(\frac{u-1}{u+1} \right) \right]_{\sqrt{2}}^x = -\ln \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right).$$

REMARQUE 163 — (Intégration par parties) Si f et g sont de classe \mathcal{C}^1 sur $]a, b[$, alors fg est encore de classe \mathcal{C}^1 et pour tous $x, y \in]a, b[$

$$\int_x^y fg' = f(y)g(y) - f(x)g(x) - \int_x^y f'g.$$

On étudie la limite de ces deux expressions pour déterminer la convergence des intégrales, on ne peut écrire directement l'égalité avec $x = a$ et $y = b$.

PROPOSITION 164

Avec les notations ci-dessus, si $f(x)g(x)$ admet une limite en a et b , alors les deux intégrales sont de même nature. Dans le cas de convergence on a alors égalité des expressions ci-dessus par passage à la limite.

EXEMPLE 165 —

1. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt$ est convergente pour $\alpha > 0$ car

$$\forall x > 1, \int_1^x \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt = \left[\frac{e^{it}}{it^\alpha} \right]_1^x - \frac{\alpha}{i} \int_1^x \frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}} dt$$

et quand x tend vers $+\infty$ le premier terme a une limite : ie^i et la seconde intégrale est absolument convergente car en norme équivalente à $\frac{1}{t^{\alpha+1}}$ intégrale de Riemann convergente.

On en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ sont convergentes si $\alpha > 0$.

2. Mais si $0 < \alpha \leq 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ ne sont pas absolument convergentes.

On pose $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha} dt$, comme

$$\forall x \in [n\pi, (n+1)\pi], \quad u_n \geq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{((n+1)\pi)^\alpha} dt = \frac{2}{\pi^\alpha(n+1)^\alpha},$$

la série $\sum u_n$ est divergente et donc l'intégrale aussi. (de même pour cos).

3. En particulier, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ est convergente et si on pose $t = u^2$ changement de variables de classe \mathcal{C}^1 bijectif on obtient que $\int_0^{+\infty} \sin u^2 du$ converge et $\sin u^2$ n'a pas de limite en $+\infty$.

PROPOSITION 166

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, +\infty[)$ intégrable, alors l'application

$$x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t) dt$$

est dérivable de dérivée ?

2.3.2 L'espace $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$

On considère ici I un intervalle de \mathbb{R} non vide, non réduit à un point. L'espace des fonctions telles que leur intégrale sur I converge est un espace vectoriel, mais il est difficile de définir une norme sur cet espace.

DÉFINITION 167

On dit qu'une fonction continue par morceaux sur I est de carré intégrable si $|f|^2$ est intégrable sur I .

PROPOSITION 168

L'espace des fonctions continue par morceaux de carrés intégrables sur I est un espace vectoriel.

Preuve — Soit f et g de carré intégrables, alors $\lambda f + \mu g$ est continue par morceaux. Comme $|\lambda f| = |\lambda||f|$, on en déduit que λf est encore de carré intégrable. De plus,

$$\forall x \in I, |f(x) + g(x)|^2 \leq 2(|f(x)|^2 + |g(x)|^2) \iff 0 \leq (|f(x)| - |g(x)|)^2$$

et donc $f + g$ est de carré intégrable. \square

PROPOSITION 169

Soit f, g continue par morceaux de carré intégrable sur I . Alors fg est continue par morceaux, intégrable sur I et

$$\left| \int_I fg \right|^2 \leq \int_I |f|^2 \times \int_I |g|^2$$

Preuve — On suppose I d'extrémités a et b . Pour tout $\alpha, \beta \in I, \alpha < \beta$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur le segment $[\alpha, \beta]$

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} fg \right|^2 \leq \left(\int_{\alpha}^{\beta} |fg| \right)^2 \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f|^2 \times \int_{\alpha}^{\beta} |g|^2.$$

puis on fait tendre α vers a et β vers b pour obtenir l'intégrabilité de fg sur I et l'inégalité attendue. \square

REMARQUE 170 — Une autre manière est de montrer que fg est intégrable en écrivant $|fg| \leq \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2)$.

2.4 DEUX EXEMPLES

Voici un exemple classique

1. Déterminer un équivalent simple de $\int_x^1 \frac{\cos t}{t} dt$ lorsque $x \rightarrow 0^+$
2. Soit c un réel strictement positif.
 - (a) Montrer que l'intégrale $\int_c^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ est convergente.
 - (b) Donner un équivalent simple de $\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ lorsque $x \rightarrow 0^+$
3. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente.
4. Soit $x > 0$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt$ converge.
 - (a) Montrer que, pour tout $x > 0$: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$
 - (b) On définit sur \mathbb{R}^{+*} la fonction F par : $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt$. Montrer que cette fonction est de classe C^2 sur \mathbb{R}^{+*} , et qu'elle vérifie pour tout $x > 0, F''(x) + F(x) = \frac{1}{x}$

Solution.

1 On a $\frac{\cos t}{t} \sim_0 \frac{1}{t}$, donc la fonction (> 0) n'est pas intégrable sur $]0, 1]$ et d'après le cours

$$\int_x^1 \frac{\cos t}{t} dt \sim_0 \int_x^1 \frac{1}{t} dt \sim_0 -\ln .x$$

2.a On fait une intégration par parties

$$\int_c^X \frac{\cos t}{t} dt = \left[\frac{\sin t}{t} \right]_c^X + \int_c^X \frac{\sin t}{t^2} dt$$

Or l'expression entre crochet tend vers 0 quand X tend vers $+\infty$ et l'intégrande de la seconde intégrale est intégrable sur $[c, +\infty[$ car majorée en valeur absolue par $\frac{1}{t^2}$.

2.b La question 1 montre que l'intégrale sur $]x, 1]$ est équivalente en 0 à $-\ln x$ et elle est finie sur $[1, +\infty[$, donc vaut un $o(\ln t)$. On a donc montré que

$$\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt \sim_0 -\ln x.$$

3. On procède comme en 2.a en prenant la primitive de $\sin t$ qui s'annule en 0 et en remarquant que l'intégrande est continue en 0 en posant $0 \mapsto 1$

$$\int_0^X \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{1 - \cos t}{t} \right]_0^X + \int_0^X \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$$

Le résultat est immédiat.

4.a. Le changement de variable affine $u = x + t$ donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u-x)}{u} du = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du$$

La dernière égalité étant justifiée car les intégrales sont convergentes (cf questions précédentes et $x > 0$) et on en déduit la convergence de l'intégrale demandée ainsi que l'égalité.

D'après la question 1 :

$$\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du \sim_0 -x \ln(x)$$

qui tend vers 0 en 0, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

4.b On vient de montrer que pour $x > 0$,

$$F(x) = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du.$$

Remarquons que si φ de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, +\infty[$ et d'intégrale $\int_a^{+\infty} \varphi(t) dt$ convergente, alors

$$x \mapsto \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt = \int_a^{+\infty} \varphi(t) dt - \int_a^x \varphi(t) dt$$

est une application de classe \mathcal{C}^1 de dérivée $-\varphi(x)$ comme somme d'une constante et la primitive de φ qui s'annule en a .

On en déduit que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et

$$F'(x) = - \left(\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du + \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du \right) + \frac{-\cos x \sin x + \sin x \cos x}{x}.$$

La dérivée est encore de classe \mathcal{C}^1 et on a

$$F''(x) = - \left(\cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du \right) + \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{x}.$$

d'où l'équation différentielle vérifiée par F .

Un autre exemple

1. Justifier l'existence de

$$I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$$

2. Etablir

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx$$

3. En séparant cette dernière intégrale en deux, observer

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x} dx$$

puis donner la valeur de I .

Solution

1. L'application $t \mapsto \frac{1-t}{\ln t}$ se prolonge par continuité en 0 par $0 \mapsto 0$ et en 1 par $1 \mapsto 1$ puisque $\ln t \sim_1 t-1$.
2. L'application $]0, 1[\rightarrow [0, +\infty[, t \mapsto -\ln t$ est \mathcal{C}^1 bijective et le changement de variables $x = -\ln t$ donne le résultat.
3. On écrit

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{x} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx - \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \quad \text{avec } u = 2x \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x} dx \end{aligned}$$

et le résultat arrive sans problème.

Puis

$$\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-2\varepsilon}}{x} dx \leq \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x} dx \leq \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-\varepsilon}}{x} dx$$

et en passant à la limite, $I = \ln 2$.

Chapitre 3 Géométrie dans le plan et l'espace

3.1 L'ESPACE AFFINE \mathbb{R}^n

On considère \mathbb{R}^n muni de sa base canonique (e_1, \dots, e_n) , le vecteur $e_j = {}^t(\delta_{i,j})_{i \in [1,n]} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon.

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, on appelle la norme de u le réel

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

On vérifie que si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\|\lambda \vec{v}\| = |\lambda| \|\vec{v}\|$.

Un vecteur unitaire est un vecteur de norme 1. Si $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, alors $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ est un vecteur de norme 1.

On définit sur \mathbb{R}^n le produit scalaire euclidien : soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

On a $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$.

Le produit scalaire est bilinéaire, c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \vec{u}, \vec{u}', \vec{v}, \vec{v}' \in P, \quad & (\lambda \vec{u} + \mu \vec{u}') \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \mu(\vec{u}' \cdot \vec{v}) \\ & \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v} + \mu \vec{v}') = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \mu(\vec{u} \cdot \vec{v}') \end{aligned}$$

Deux vecteurs \vec{u} et $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ sont orthogonaux si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Une base $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est une base orthogonale (resp. orthonormée) si $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0$ si $i \neq j$ (resp. $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \delta_{i,j}$).

La base canonique est une base orthonormée.

Soit $\mathcal{F} = A + F$ le sous-espace affine de \mathbb{R}^n passant par A et de direction $F \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel.

Un repère (respectivement un repère orthogonal, orthonormé) est un couple $\mathcal{R} = (\Omega, \mathcal{B})$ où $\Omega \in \mathcal{F}$ et \mathcal{B} est une base (resp. orthogonale, orthonormée) de F . On dit que le repère est centré en Ω .

Par exemple $(O, (e_1, \dots, e_n))$ est un repère de \mathbb{R}^n centré en l'origine $O = (0, \dots, 0)$.

Si $\mathcal{R} = (\Omega, (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p))$ est un repère de \mathcal{F} , alors tout point M s'écrit

$$M = \Omega + \overrightarrow{\Omega M} = \Omega + x_1 \vec{u}_1 + \dots + x_p \vec{u}_p.$$

Le p -uplet (x_1, \dots, x_p) s'appelle les coordonnées cartésiennes de M dans le repère \mathcal{R} . Ce sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ dans la base \mathcal{B} .

On pourra noter $\Omega M = \|\overrightarrow{\Omega M}\|$. On comprendra que ΩM est la distance entre le point Ω et le point M ; c'est aussi la longueur du vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$.

3.2 GÉOMÉTRIE DANS LE PLAN

Dans cette partie \mathcal{P} est un plan affine de \mathbb{R}^n et P est le plan vectoriel associé : $\mathcal{P} = O + P$ où $O \in \mathcal{P}$. On a une bijection

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{P} &\rightarrow P \\ M &\mapsto \overrightarrow{OM} \end{aligned}$$

3.2.1 Modes de repérage

§ 1. Coordonnées cartésiennes

PROPOSITION 171

(Changement de coordonnées) On se donne deux repères $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{R}' = (O', \vec{i}', \vec{j}')$. On suppose que O' a pour coordonnées (α, β) dans \mathcal{R} et que

$$\begin{cases} \vec{i}' = a\vec{i} + b\vec{j} \\ \vec{j}' = c\vec{i} + d\vec{j} \end{cases}.$$

Soit M un point de \mathcal{P} de coordonnées (x, y) dans \mathcal{R} et (x', y') dans \mathcal{R}' . Alors

$$\begin{cases} x = \alpha + ax' + cy' \\ y = \beta + bx' + dy' \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

REMARQUE 172 —

1. La matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base (\vec{i}, \vec{j}) à la base (\vec{i}', \vec{j}') .
2. Quand on fait un changement de repère on aimerait avoir les coordonnées (x', y') en fonction de (x, y) .

Vous savez que $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ et donc :

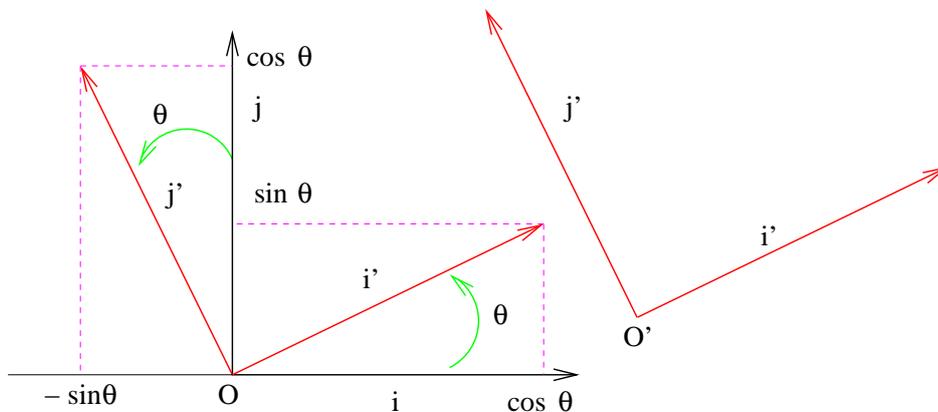
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

REMARQUE 173 — Si $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée de \mathcal{P} , alors on a une bijection $\mathbb{C} \rightarrow \mathcal{P}$, $z = x + iy \mapsto (x, y)$. On dit que z est l'affixe du vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

DÉFINITION 174

Avec les notations précédentes, si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs du plans d'affixe respective $re^{i\theta}$ et $r'e^{i\theta'}$, alors on dit qu'une mesure de l'angle $\widehat{(\vec{i}', \vec{j}')}$ formé par les vecteurs \vec{u} et \vec{v} est le réel $\text{mes}(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = \theta' - \theta$.

EXEMPLE 175 — On suppose que \mathcal{R} et \mathcal{R}' sont orthonormés directs et que $\text{mes}(\widehat{(\vec{i}, \vec{i}')}) = \theta[2\pi]$:



On obtient alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ \beta + x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Et si l'on veut (x', y') en fonction de (x, y) , on exprime les coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}$ de O dans \mathcal{R}' et on change θ en $-\theta$:

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha \\ -\beta \end{pmatrix};$$

ainsi

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

§ 2. *Coordonnées polaires* On considère \mathcal{P} muni du repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé.

DÉFINITION 176

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. On appelle vecteur normé d'angle polaire θ le vecteur

$$\vec{u}(\theta) = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}.$$

2. On note le vecteur directement orthogonal à $\vec{u}(\theta)$ le vecteur

$$\vec{v}(\theta) = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j},$$

c'est-à-dire $\text{mes}(\widehat{\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta)}) = \frac{\pi}{2}$.

Alors $(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ est une base orthonormée directe.

REMARQUE 177 — On remarque que $\vec{v}(\theta)$ est le vecteur dérivé en θ de $\vec{u}(\theta)$: si $z = e^{i\theta}$ est l'affixe de $\vec{u}(\theta)$, alors $z' = ie^{i\theta}$ est l'affixe de $\vec{v}(\theta)$.

DÉFINITION 178

(Coordonnées polaires) On appelle système de coordonnées polaires d'un point M du plan \mathcal{P} muni d'un repère orthonormé direct \mathcal{R} un couple $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\vec{OM} = \rho \cos \theta \vec{i} + \rho \sin \theta \vec{j} = \rho \vec{u}(\theta).$$

REMARQUE 179 — Si $M \neq O$ admet pour (système de) coordonnées polaires (ρ, θ) , alors un couple (r, t) est un système de coordonnées polaires de M si et seulement si

$$\begin{cases} r = \rho \\ t \equiv \theta [2\pi] \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} r = -\rho \\ t \equiv \theta + \pi [2\pi] \end{cases},$$

et en particulier un système de coordonnées polaires n'est pas unique. Mais si on suppose par exemple $\rho > 0$ et $\theta \in]-\pi; \pi]$, alors on retrouve l'unicité du couple (ρ, θ) et θ est la détermination principale de l'argument de $x + iy$.

EXEMPLE 180 —

1. Le cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = 1$ a pour équation polaire $\rho = 1$.
2. La droite d'équation cartésienne $2x + 3y = 5$ a pour équation polaire $\rho = \frac{5}{2 \cos \theta + 3 \sin \theta}$.

PROPOSITION 181

Soit $M \neq O$ de coordonnées cartésiennes (x, y) et de coordonnées polaires (ρ, θ) dans un repère orthonormé direct \mathcal{R} . On a

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

Réciproquement, on exprime (ρ, θ) en fonction de x et y :

$$\begin{aligned}
 1. \text{ si } \rho > 0, \text{ alors } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } & \begin{cases} \theta \equiv \pi[2\pi] & \text{si } x < 0, y = 0 \\ \theta \equiv 2 \arctan \frac{y}{x + \rho} [2\pi] & \text{sinon} \end{cases} \\
 2. \text{ si } \rho < 0, \text{ alors } \rho = -\sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } & \begin{cases} \theta \equiv 0[2\pi] & \text{si } x < 0, y = 0 \\ \theta \equiv 2 \arctan \frac{y}{x - \rho} + \pi[2\pi] & \text{sinon} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Preuve — Si $\rho > 0$, et $x \geq 0$, il suffit d'écrire

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} = \frac{2\rho \cos(\theta/2) \cdot \sin(\theta/2)}{2\rho \cos^2(\theta/2)} = \frac{\rho \sin \theta}{\rho + \rho \cos \theta} = \frac{y}{\rho + x}.$$

□

3.2.2 Produit scalaire

PROPOSITION 182

Si \vec{u} a pour affixe z et \vec{v} pour affixe z' dans P muni d'un repère orthonormé, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \operatorname{Re}(\bar{z}z').$$

COROLLAIRE 183

On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta,$$

où $\theta \equiv \pm \operatorname{mes}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})[2\pi]$, c'est-à-dire une mesure de l'angle non orienté.

Preuve — Si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, alors $\operatorname{Re}(\bar{z}z') = xx' + yy'$ et la proposition est démontrée. Si de plus, $z = \rho e^{i\theta_1}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'_1}$, alors $\bar{z}z' = \rho\rho' e^{i(\theta'_1 - \theta_1)}$ et $\theta = \theta'_1 - \theta_1$ est une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$. D'où $\operatorname{Re}(\bar{z}z') = \rho\rho' \cos \theta$, ce qui montre le lemme. □

PROPOSITION 184

(Inégalité de Cauchy) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in P$ muni d'une base orthonormée, on a

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|,$$

et on a égalité si et seulement si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et de même sens.

Preuve — Il suffit d'écrire $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$. □

COROLLAIRE 185

$\forall a, b, c$ et $c \in \mathbb{R}$, $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$.

3.2.3 Déterminant ou produit mixte

DÉFINITION 186

Le déterminant de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} rapportés à une base orthonormée est par définition le scalaire

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'.$$

PROPOSITION 187

Si \vec{u} a pour affixe z et \vec{v} a pour affixe z' dans une base orthonormée directe, alors

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \operatorname{Im}(\bar{z}z') = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta,$$

où $\theta \equiv \operatorname{mes}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})[2\pi]$, c'est-à-dire une mesure de l'angle orienté.

Preuve — Écrire z et z' sous forme cartésienne, puis sous forme polaire. □

PROPOSITION 188

Dans le plan, le déterminant est bilinéaire, antisymétrique, c'est-à-dire :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u}).$$

Preuve — $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx' = -(x'y - xy') = -\det(\vec{v}, \vec{u})$. □

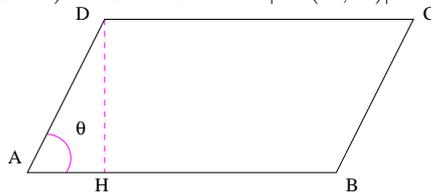
PROPOSITION 189

(Applications ultra-classiques)

1. Deux vecteurs du plan sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.
2. L'aire du parallélogramme $ABCD$ est $\mathcal{A}(ABCD) = |\det(\vec{AB}, \vec{AD})|$.

Preuve —

1. $\iff \sin \theta = 0 \iff \vec{u}, \vec{v}$ colinéaires.
2. Comme $DH = AD \sin \theta$, on a $\mathcal{A}(ABCD) = AB \times AD \sin \theta = |\det(\vec{u}, \vec{v})|$.



□

3.2.4 Droites du plan

Rappelons qu'une droite vectorielle D de \mathcal{P} engendrée par $\vec{u} \in \mathcal{P}$ vecteur non nul est l'ensemble

$$D = \{\lambda \vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

et la droite affine passant \mathcal{D} passant par $A \in \mathcal{P}$ dirigée par $\vec{u} \in \mathcal{P}$ est l'ensemble

$$\mathcal{D} = \{M \in \mathcal{P} \mid \vec{AM} \in D\}.$$

On dit que D est la droite vectorielle associée à \mathcal{D} , que \vec{u} est un vecteur directeur de \mathcal{D} et que tout vecteur orthogonal à \vec{u} est un vecteur normal de \mathcal{D} .

§ 1. Caractérisations géométriques

PROPOSITION 190

La droite D passant par A et dirigée par un vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$ est

$$\mathcal{D} = \{M \in \mathcal{P} \mid \det(\vec{AM}, \vec{u}) = 0\}.$$

PROPOSITION 191

Soit \vec{n} un vecteur non nul de \mathcal{P} et A un point de \mathcal{P} . La droite D passant par A et normale à \vec{n} est

$$\mathcal{D} = \{M \in \mathcal{P} \mid \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0\}.$$

§ 2. Équations cartésiennes

PROPOSITION 192

On fixe un repère orthonormé du plan affine \mathcal{P} .

1. La droite du plan passant par $A(a_1, a_2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(\alpha, \beta)$ a pour équation

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & \alpha \\ y - a_2 & \beta \end{vmatrix} = 0 \iff \beta(x - a_1) - \alpha(y - a_2) = 0.$$

2. La droite du plan passant par $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$ avec $A \neq B$ a pour équation

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & b_1 - a_1 \\ y - a_2 & b_2 - a_2 \end{vmatrix} = 0 \iff (b_2 - a_2)(x - a_1) - (b_1 - a_1)(y - a_2) = 0.$$

3. La droite du plan passant par $A(a_1, a_2)$ et dont un vecteur normal est $\vec{n}(\alpha, \beta)$ a pour équation

$$\begin{pmatrix} x - a_1 \\ y - a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \iff \alpha(x - a_1) + \beta(y - a_2) = 0$$

REMARQUE 193 — En pratique, la droite d'équation $ay + bx + c = 0$ admet pour vecteur normal $\vec{n}(a, b)$ et pour vecteur directeur $\vec{u}(-b, a)$ et elle passe par $(0, -c/a)$ ou $(-c/b, 0)$ quand ces quantités sont définies. En particulier, l'équation d'une droite de coefficient directeur α et passant par $A(a, b)$ est

$$y = \alpha(x - a) + b.$$

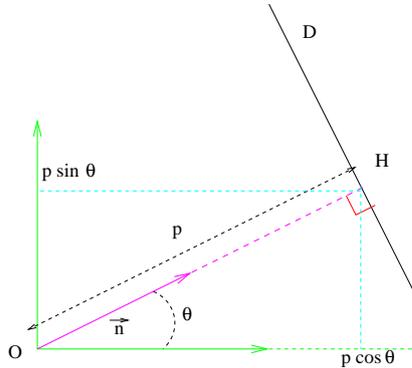
PROPOSITION 194

Soit \mathcal{D} une droite de vecteur normal unitaire $\vec{n}(\cos \theta, \sin \theta)$. Alors \mathcal{D} a pour équation

$$\cos \theta x + \sin \theta y = p,$$

où $p = \overline{OH}$, H le projeté orthogonal de O sur \mathcal{D} .

Preuve — On fait un dessin :



et H a pour coordonnées $(p \cos \theta, p \sin \theta)$. Donc

$$M(x, y) \in \mathcal{D} \iff \overline{HM} \cdot \vec{n} = 0 \iff \cos \theta(x - p \cos \theta) + \sin \theta(y - p \sin \theta) = 0 \iff \cos \theta x + \sin \theta y = p.$$

□

§ 3. Représentation paramétrique d'une droite

PROPOSITION 195

On fixe un repère de \mathcal{P} . La droite \mathcal{D} passant par $A(a_1, a_2)$ et dirigée par $\vec{u}(\alpha, \beta)$ admet pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = a_1 + \alpha t \\ y = a_2 + \beta t \end{cases},$$

c'est-à-dire $\mathcal{D} = \{(x, y) \mid \exists t \in \mathbb{R}, x = a_1 + \alpha t, y = a_2 + \beta t\}$.

Preuve — $M \in \mathcal{D} \iff \overline{AM}$ et \vec{u} colinéaires $\iff \exists t \in \mathbb{R}, \overline{AM} = t\vec{u}$.

□

REMARQUE 196 — Dans l'équation $ax + by = c$, on choisit une valeur pour x et on calcule la valeur correspondante pour y . Dans une représentation paramétrique on choisit la valeur du paramètre t et on obtient la valeur de x et y correspondante.

§ 4. Équation polaire d'une droite

PROPOSITION 197

1. Soit $\mathcal{D} : ax + by = c$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ et $c \neq 0$ une droite ne passant par l'origine. Alors \mathcal{D} a pour équation polaire

$$\rho = \frac{1}{\frac{a}{c} \cos \theta + \frac{b}{c} \sin \theta}.$$

2. Réciproquement, pour tout $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, l'équation polaire

$$\rho = \frac{1}{\lambda \cos \theta + \mu \sin \theta}$$

est l'équation de la droite $\mathcal{D} : \lambda x + \mu y = 1$.

REMARQUE 198 — Quelle est l'équation polaire d'une droite passant par O ? (faire un dessin).

3.2.5 Cercles du plan

On rappelle que dans le plan \mathcal{P} , le cercle de centre A et de rayon r est l'ensemble des points M du plan tels que $\|AM\| = r$.

PROPOSITION 199

1. L'équation polaire du cercle de centre O et de rayon r est $\rho = r$;
2. L'équation polaire d'un cercle \mathcal{C} passant par l'origine

$$\rho = 2a \cos \theta + 2b \sin \theta$$

et (a, b) est alors le centre du cercle.

Preuve — 1/ est évident. Pour le 2/, on écrit le cercle en cartésienne : $\mathcal{C} : (x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2$ et on remplace x et y par leur expression en polaire :

$$\rho^2 - 2a\rho \cos \theta - 2b\rho \sin \theta = 0 \iff \rho - 2a \cos \theta - 2b \sin \theta = 0,$$

on a pu simplifier par ρ , car la dernière égalité inclut ce cas : en effet \tan est une bijection de $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ sur \mathbb{R} et donc on peut trouver θ tel que $2a \cos \theta + 2b \sin \theta = 0$.

On retrouve bien l'équation désirée. Noter que l'on s'en servira dans l'autre sens, une équation en polaire de la forme $\rho = \alpha \cos \theta + \beta \sin \theta$ est un cercle de centre $(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2})$. \square

REMARQUE 200 — On rappelle que l'intersection d'une droite et d'un cercle est soit deux points distincts, soit un point (alors la droite est tangente au cercle) soit l'ensemble vide. De même l'intersection de deux cercles est soit deux points, soit un point (et alors les deux cercles sont tangents) soit un cercle (et alors les deux cercles sont confondus) soit l'ensemble vide.

3.3 GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Dans cette partie \mathcal{E} est sous-espace affine de dimension 3 de \mathbb{R}^n : $\mathcal{E} = \Omega + E$ où $\Omega \in \mathcal{E}$ et E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n de dimension 3.

3.3.1 Modes de repérage

§ 1. Coordonnées cartésiennes

PROPOSITION 201

(changement de coordonnées) Soit $\mathcal{R} = (0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $\mathcal{R}' = (0, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ deux repères de \mathcal{E} . On suppose que O' a pour coordonnées (α, β, γ) dans \mathcal{R} et que

$$\begin{cases} \vec{i}' = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \\ \vec{j}' = a'\vec{i} + b'\vec{j} + c'\vec{k} \\ \vec{k}' = a''\vec{i} + b''\vec{j} + c''\vec{k} \end{cases} .$$

Soit M un point de coordonnées (x, y, z) dans \mathcal{R} et (x', y', z') dans \mathcal{R}' . On a alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + x'a + y'a' + z'a'' \\ \beta + x'b + y'b' + z'b'' \\ \gamma + x'c + y'c' + z'c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

REMARQUE 202 —

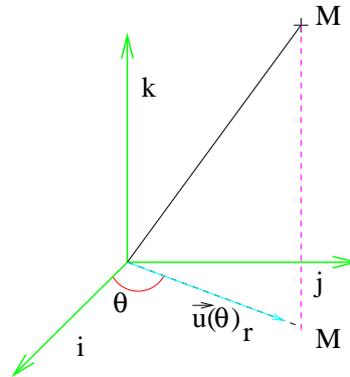
1. La matrice $\begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$ est la matrice de changement de bases de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$.
Pour exprimer les coordonnées (x', y', z') en fonction de x, y et z , il faut inverser cette matrice, ce que maintenant vous savez faire!
2. Nous ne faisons pas que des changements de coordonnées linéaires. C'est l'objet des paragraphes suivants.

§ 2. Coordonnées cylindriques

On fixe un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de \mathcal{E} .

DÉFINITION 203

Soit M un point de coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans \mathcal{R} . On appelle système de coordonnées cylindriques de M tout triplet (r, θ, z) tel que (r, θ) est un système de coordonnées polaires du projeté orthogonal M' de M dans le plan de repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

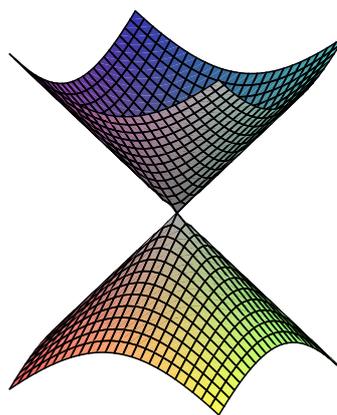


REMARQUE 204 —

1. En notant $\vec{u}(\theta)$ le vecteur unitaire d'angle θ dans (O, \vec{i}, \vec{j}) et si (r, θ, z) est un système de coordonnées cylindriques, alors on a $\vec{OM} = r\vec{u}(\theta) + z\vec{k}$.
2. Si M a pour coordonnées cylindriques (r, θ, z) et pour coordonnées cartésiennes (x, y, z) , alors $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ et en particulier $x^2 + y^2 = r^2$.

EXEMPLE 205 —

1. L'équation du cylindre d'axe (Oz) et de rayon 1 a pour équation en coordonnées cylindriques $r = 1$ et en coordonnées cartésiennes $x^2 + y^2 = 1$.
2. Si Γ est le cône d'axe (Oz) d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = z^2$, alors son équation en coordonnées cylindriques est $r^2 = z^2$.



REMARQUE 206 — Tout comme pour les coordonnées polaires, les coordonnées cylindriques ne sont pas uniques, mais si on impose $r > 0$ et $\theta \in]-\pi; \pi]$, alors elles le deviennent.

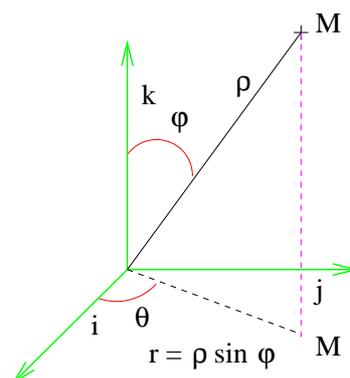
§ 3. Coordonnées sphériques

On fixe un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de \mathcal{E} .

DÉFINITION 207

Soit M un point de coordonnées (x, y, z) dans \mathcal{R} ; on appelle système de coordonnées sphériques tout triplet (ρ, θ, φ) de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [0; \pi]$ tel que

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$



EXEMPLE 208 — L'ensemble des points M de coordonnées sphériques (ρ, θ, φ) vérifiant $\rho = R$ et $\varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]$ est une demi-sphère supérieure centrée en O . et de rayon R .

REMARQUE 209 — En physique il faut échanger les rôles de φ et θ .

3.3.2 Produit scalaire

PROPOSITION 210

Soient $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ deux vecteurs de E rapportés à un repère orthonormé. Alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta,$$

où θ est une mesure l'angle géométrique (non orienté) entre \vec{u} et \vec{v} .

Preuve — Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires, alors par exemple $\vec{v} = \lambda \vec{u}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \lambda \vec{u} \cdot \vec{u} = \lambda \|\vec{u}\|^2$ $\theta = 0$ si $\lambda > 0$, $\theta = \pi$, sinon. Si (\vec{u}, \vec{v}) libre, alors $P = \text{vect}(\vec{u}, \vec{v})$ est un plan. Et le paragraphe sur les plans affines montre alors que la relation est encore vraie. \square

COROLLAIRE 211

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $\text{mes}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\pi}{2} [\pi]$.

COROLLAIRE 212
(Inégalité de Cauchy-Schwartz)

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \vec{u} \cdot \vec{v} \leq \|u\| \|v\|.$$

3.3.3 Produit vectoriel

DÉFINITION 213

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ dans une base orthonormée directe est par définition

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - y'z) \vec{i} + (zx' - xz') \vec{j} + (xy' - x'y) \vec{k}$$

REMARQUE 214 — Pour calculer le produit de deux vecteurs on écrit les coordonnées des vecteurs en

colonnes en répétant les deux premières coordonnées : $\begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \\ x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}$; on raye la première ligne et le déterminant

$\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}$ donne la première coordonnée de $\vec{u} \wedge \vec{v}$; puis on raye la seconde ligne et le déterminant $\begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}$ donne la seconde coordonnée ; enfin en rayant la troisième ligne on obtient la troisième coordonnée $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.

PROPOSITION 215

L'application produit vectoriel est

1. bilinéaire : $(\lambda \vec{u} + \mu \vec{u}') \wedge \vec{v} = \lambda \vec{u} \wedge \vec{v} + \mu \vec{u}' \wedge \vec{v}$ et $\vec{u} \wedge (\lambda \vec{v} + \mu \vec{v}') = \lambda \vec{u} \wedge \vec{v} + \mu \vec{u} \wedge \vec{v}'$;
2. antisymétrique : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.

Preuve — À faire en exercice, il suffit de calculer les deux parties des égalités en remplaçant les vecteurs par leurs coordonnées. □

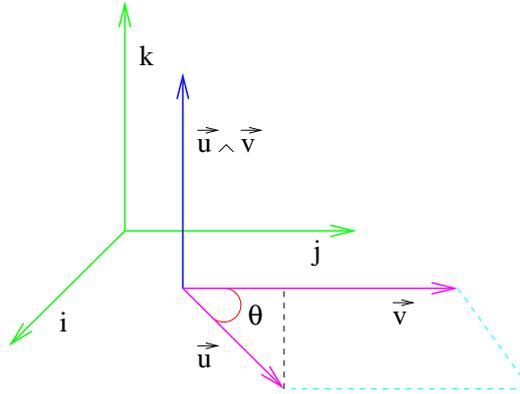
PROPOSITION 216

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in E$ muni d'une base orthonormée directe :

1. $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si et seulement si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.
2. $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur orthogonal à \vec{u} et \vec{v} .
3. $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin \theta|$, où θ est une mesure de l'angle orienté entre \vec{u} et \vec{v} .
4. si \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires, alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe.

Preuve —

1. On vérifie facilement que si $\vec{u} = \lambda \vec{v}$, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$; dans l'autre sens, on utilise la remarque 214.
2. Calculer $\vec{u} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$ en coordonnées cartésiennes ; on trouve le vecteur nul.
3. Vérifier que $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$, puis utiliser que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$.
4. Il faut vérifier que les trois vecteurs ne sont pas coplanaires (supposer le contraire), puis que la base est directe (qu'est-ce qu'une base directe?). □



PROPOSITION 217

(Application) L'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs \vec{u} et \vec{v} est égal à $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$.

3.3.4 Déterminant (ou produit mixte)

DÉFINITION 218

Soit \mathcal{B} une base orthonormée directe de E . On appelle déterminant, ou produit mixte de trois vecteurs $\vec{u}(x, y, z)$, $\vec{v}(x', y', z')$ et $\vec{w}(x'', y'', z'')$ de E le scalaire

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$

PROPOSITION 219

Si $\vec{u}(x, y, z)$, $\vec{v}(x', y', z')$ et $\vec{w}(x'', y'', z'')$ dans une base orthonormée directe, alors

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = xy'z'' + x''yz' + x'y''z - x''y'z - xy''z' - x'y'z''$$

REMARQUE 220 — On retrouve le résultat en appliquant la règle de Sarrus : les diagonales en descendant de gauche à droite ont le signe + et celles en montant ont le signe -.

EXEMPLE 221 — Si $\vec{u}(1, 0, 2)$, $\vec{v}(1, 1, 1)$ et $\vec{w}(-1, -1, 0)$, alors $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ se calcule :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 0 + 0 \times 0 \times (-1) + 2 \times 1 \times (-1) - 2 \times 1 \times (-1) - 0 \times 1 \times 0 - 1 \times 1 \times -1$$

et donc vaut 1. On verra de meilleures méthodes que Sarrus plus tard.

PROPOSITION 222

L'application $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est multilinéaire (c'est-à-dire linéaire en \vec{u} , \vec{v} et \vec{w}) alternée (si on inverse l'ordre de deux termes consécutifs, alors le déterminant change de signe).

Preuve — Pour la multilinéarité écrire : $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$ et le produit vectoriel et le produit scalaire sont linéaires.

La forme est alternée : écrire $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ en coordonnées cartésiennes, et vérifier "à la main" que si on intervertit deux vecteurs consécutifs, alors le déterminant change de signe. \square

PROPOSITION 223

(Fondamentale)

1. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$;

2. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base directe si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) > 0$.

Preuve —

1. On montre non $A \iff$ non B : Si \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires, alors $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à \vec{u} et à \vec{v} , donc aussi à \vec{w} et $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$; et réciproquement, si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$, alors $w \perp (\vec{u} \wedge \vec{v})$, et donc $\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}$ sont coplanaires.
2. On le montrera plus tard ou plutôt on verra que c'est en fait la définition d'une base directe.

□

PROPOSITION 224

(Interprétation géométrique) Le volume du parallélépipède construit sur \vec{AB}, \vec{AC} et \vec{AD} est égal à $\mathcal{V} = |\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})|$.

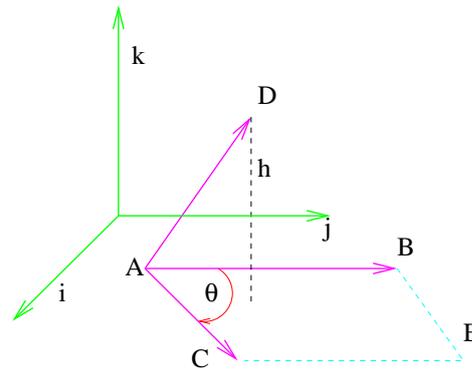
Preuve — On calcule d'abord k :

$$k = \frac{\vec{AC} \wedge \vec{AB}}{\|\vec{AC} \wedge \vec{AB}\|} = \frac{\vec{AC} \wedge \vec{AB}}{\|\vec{AC}\| \|\vec{AB}\| \sin \theta} = \frac{\vec{AC} \wedge \vec{AB}}{\mathcal{A}(ABEC)}.$$

Puis,

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}(ABEC) \times h = \mathcal{A}(ABEC) \times |\vec{AD} \cdot \vec{k}|.$$

$$\text{Et } \mathcal{V} = |\vec{AD} \cdot (\vec{AC} \wedge \vec{AB})| = |\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})|.$$



□

3.3.5 Droites et plans

Rappelons qu'un plan vectoriel P de E engendré par $\vec{u}, \vec{v} \in E$ deux vecteurs non colinéaires est l'ensemble

$$P = \{\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

et le plan affine \mathcal{P} dirigé par \vec{u} et \vec{v} et passant par A est l'ensemble

$$\mathcal{P} = \{M \in \mathcal{E} \mid \vec{AM} \in P\}.$$

On dit que P est le plan vectoriel associé à \mathcal{P} et tout vecteur \vec{n} orthogonal à \vec{u} et \vec{v} est appelé vecteur normal à \mathcal{P} .

§ 1. Caractérisations géométriques

PROPOSITION 225

1. Soit A un point de \mathcal{E} et \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non colinéaires. Alors le plan passant par A dirigé par les vecteurs \vec{u} et \vec{v} est l'ensemble des points tels que $\det(\vec{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$.
2. Soit \vec{n} un vecteur non nul et A un point. Le plan \mathcal{P} normal à \vec{n} et passant par A est l'ensemble des vecteurs des vecteurs orthogonaux à \vec{n} ; de plus, si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs non colinéaires orthogonaux à \vec{n} , alors

$$P = \{\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

et

$$\mathcal{P} = \{M \in \mathcal{E} \mid \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0\}$$

EXEMPLE 226 — Si \mathcal{E} est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, alors \vec{i} et \vec{j} déterminent un plan vectoriel P qui a pour vecteur normal \vec{k} . Le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) est donc le plan (affine) passant par O et de vecteur normal \vec{k} .

§ 2. *Équations cartésiennes* On suppose que \mathcal{E} est muni d'un ROND $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

PROPOSITION 227

1. Le plan passant par $A(a_1, a_2, a_3)$ et dirigé par $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\vec{v}(\alpha', \beta', \gamma')$ a pour équation cartésienne

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & \alpha & \alpha' \\ y - a_2 & \beta & \beta' \\ z - a_3 & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = 0.$$

2. Le plan passant par trois points non alignés $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ et $C(c_1, c_2, c_3)$ a pour équation cartésienne

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ y - a_2 & b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \\ z - a_3 & b_3 - a_3 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

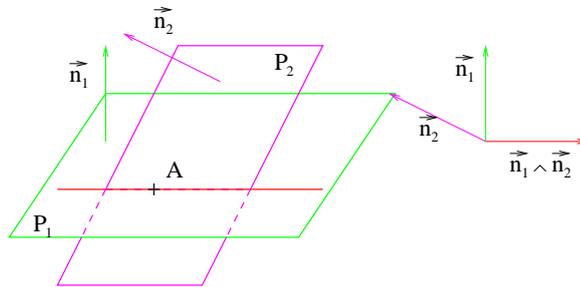
3. Le plan passant par $A(a_1, a_2, a_3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(\alpha, \beta, \gamma)$ a pour équation cartésienne

$$\alpha(x - a_1) + \beta(y - a_2) + \gamma(z - a_3) = 0.$$

PROPOSITION 228

L'intersection de deux plans non parallèles \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 de vecteur normal respectif \vec{n}_1 et \vec{n}_2 est une droite de vecteurs directeur $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$.

Preuve — Soit $A \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ (existe car \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 non parallèles). Alors $M \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ si et seulement si $M \in \mathcal{P}_1$ et $M \in \mathcal{P}_2$, c'est-à-dire $\vec{AM} \perp \vec{n}_1$ et $\vec{AM} \perp \vec{n}_2$, ce qui est encore équivalent à $\vec{AM} \perp \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$ colinéaires, et donc l'intersection est bien une droite dirigée par $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$.



□

COROLLAIRE 229

1. Pour déterminer un plan \mathcal{P} dans l'espace on a besoin d'une équation

$$\mathcal{P} : ax + by + cz = d.$$

Un vecteur normal de \mathcal{P} est $\vec{n}(a, b, c)$ et son plan vectoriel associé a pour équation $P : ax + by + cz = 0$.

2. Pour déterminer une droite \mathcal{D} dans l'espace, on a besoin de deux telles équations (intersection de deux plans)

$$\mathcal{D} : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \quad \text{non colinéaires.}$$

La droite \mathcal{D} est alors dirigée par $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, donc la droite vectorielle associée D est $D = \{\lambda \vec{w}, \lambda \in \mathbb{R}\}$. Il faut encore trouver un point de la droite, pour cela, on peut résoudre le système ou trouver un point "évident".

EXEMPLE 230 — La droite \mathcal{D} de système d'équations $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$ a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et passe par le point $(1/4, 1/4, 3/2)$ (on a pris $x = y$ pour trouver z).

§ 3. Représentation paramétrique de droites et de plans \mathcal{E} est toujours muni d'un ROND.

PROPOSITION 231

1. La droite \mathcal{D} passant par $A(a_1, a_2, a_3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = a_1 + t\alpha \\ y = a_2 + t\beta \\ z = a_3 + t\gamma \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

2. Le plan \mathcal{P} passant par $A(a_1, a_2, a_3)$ et dirigé par $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\vec{v}(\alpha', \beta', \gamma')$ (c'est-à-dire que le plan vectoriel \mathcal{P} associé à \mathcal{P} admet pour base (\vec{u}, \vec{v})) a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = a_1 + t\alpha + t'\alpha' \\ y = a_2 + t\beta + t'\beta' \\ z = a_3 + t\gamma + t'\gamma' \end{cases} \quad \text{où } t, t' \in \mathbb{R}$$

Preuve — 1/ Écrire $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ et 2/ Écrire $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$. □

§ 4. Perpendiculaire commune

DÉFINITION 232

Soient \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 deux droites de \mathcal{E} . On dit que

1. \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont orthogonales si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux ;
2. \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont perpendiculaires si elles sont orthogonales et sécantes ;
3. \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont parallèles si elles sont non confondues et si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires ;

PROPOSITION 233

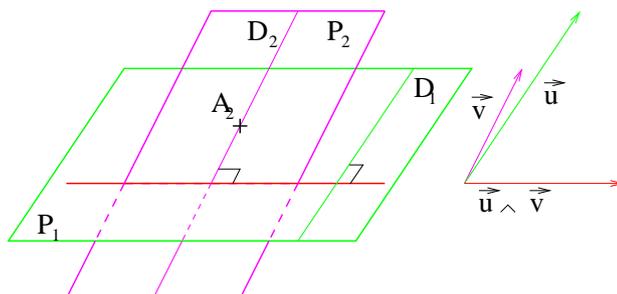
Soit \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 deux droites de \mathcal{E} non parallèles. Alors il existe une unique droite Δ perpendiculaire à la fois à \mathcal{D}_1 et à \mathcal{D}_2 . On l'appelle la perpendiculaire commune.

Preuve — La preuve donne aussi l'algorithme pour trouver Δ : on suppose \mathcal{D}_1 passant par A_1 et dirigée par \vec{u} et \mathcal{D}_2 passant par A_2 et dirigée par \vec{v} .

Si Δ existe, elle est dirigée par $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, puisque c'est l'unique direction perpendiculaire à la fois à \vec{u} et \vec{v} .

Ensuite, remarquons que le plan \mathcal{P}_1 passant par A_1 et dirigé par \vec{u} et \vec{w} ainsi que le plan \mathcal{P}_2 passant par A_2 et dirigé par \vec{v} et \vec{w} doivent contenir la droite Δ , puis que Δ doit contenir un point de \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 et être dirigée par \vec{w} . Donc si \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 ne sont pas parallèles, alors Δ est dans l'intersection $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ qui est une droite. On en déduit que si Δ existe, alors Δ est unique.

Il reste à montrer que les deux plans sont non parallèles, ce qui est clair car si c'était le cas \mathcal{P}_1 dirigés par \vec{u} et \vec{w} serait égal au plan \mathcal{P}_2 dirigé par \vec{v} et \vec{w} , mais c'est absurde car $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de E .



□

REMARQUE 234 — L'existence de Δ est encore vraie si \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont parallèles, mais on n'a plus l'unicité.

EXEMPLE 235 — Soit \mathcal{D}_1 passant par l'origine et dirigée par $\vec{u}(1, 1, 0)$ et soit \mathcal{D}_2 passant par $A(1, 1, 1)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(0, 1, -1)$. La perpendiculaire commune à \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 est l'intersection des plans $\mathcal{P}_1(O, \vec{u}, \vec{w})$ et $\mathcal{P}_2(A, \vec{v}, \vec{w})$ où $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, $\vec{w}(-1, 1, 1)$.

Donc on a pour équations

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x & 1 & -1 & 0 \\ y & 1 & 1 & 0 \\ z & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) = 0 \text{ et } \left(\begin{array}{ccc|c} x-1 & 0 & 1 & 0 \\ y-1 & 1 & 1 & 0 \\ z-1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) = 0 \iff \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + y + z - 4 = 0 \end{cases} .$$

3.3.6 Sphères

L'espace affine euclidien de dimension 3 \mathcal{E} est muni d'un ROND \mathcal{R} .

DÉFINITION 236

La sphère \mathcal{S} de centre A et de rayon r est l'ensemble des points M tels $\|\overrightarrow{AM}\| = r$.

L'équation cartésienne de \mathcal{S} est $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ avec $A(a, b, c)$.

PROPOSITION 237

(Intersection d'une sphère et d'un plan) Soit \mathcal{S} la sphère de centre $A \in \mathcal{E}$ et de rayon $r > 0$ et \mathcal{P} un plan.

Alors $\mathcal{S} \cap \mathcal{P} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } d(A, \mathcal{P}) > r \\ H & \text{si } d(A, \mathcal{P}) = r \\ \text{cercle} & \text{si } d(A, \mathcal{P}) < r \end{cases}$, où H est le projeté orthogonal de A sur \mathcal{P} .

REMARQUE 238 — Ceci démontre que le plan tangent en un point d'une sphère est orthogonal au rayon passant par ce point.

PROPOSITION 239

Soient \mathcal{S} et \mathcal{S}' deux sphères de rayon r et $r' > 0$ et soit d la distance entre les deux centres. Alors

$$\mathcal{S} \cap \mathcal{S}' \neq \emptyset \iff |r - r'| \leq d \leq r + r'.$$

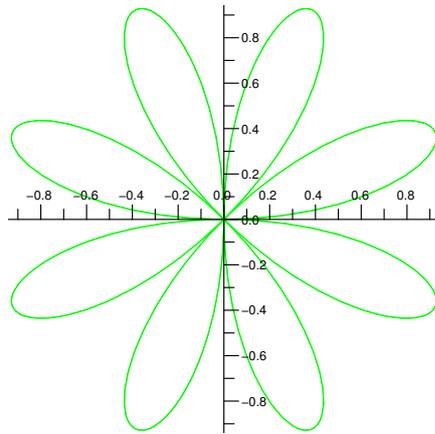
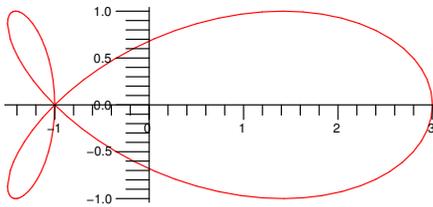
Chapitre 4 Courbes paramétrées

On étudie ici les courbes paramétrées Γ ensemble des points $M(t)$ de coordonnées $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ où t varie dans un intervalle I est x et y sont des fonctions. Le cas que l'on connaît déjà est si $x(t) = t$, alors Γ est le graphe de la fonction $y(t)$.

On peut assimiler $M(t)$ à un point mobile qui se déplace dans le temps et la courbe Γ est sa trajectoire. On étudiera le cas où $M(t)$ est donné en coordonnées cartésiennes, mais aussi en coordonnées polaires : voici deux exemples

$$\Gamma_1 : (\cos 2t + 2 \cos t, \sin 2t)$$

$$\Gamma_2 : \rho = \sin 4t$$



4.1 APPLICATIONS DE \mathbb{R} DANS \mathbb{R}^n

Ici, on considère \mathbb{R}^n comme un espace vectoriel. On notera le produit scalaire de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} soit $\vec{u} \cdot \vec{v}$, soit $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle$, ou encore $(\vec{u} | \vec{v})$. Si $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, on note $\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u} | \vec{u} \rangle}$.

PROPOSITION 240

Soit $\vec{u} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\max(|x_1|, \dots, |x_n|) \leq \|\vec{u}\| \leq |x_1| + \dots + |x_n|.$$

Preuve — On a $|x_i|^2 \leq |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 = \|\vec{u}\|^2 \leq (|x_1| + \dots + |x_n|)^2$. On prend la racine carrée et on obtient le résultat. \square

4.1.1 Limites, continuité, dérivation

Soit I un intervalle de \mathbb{R} non vide, ni réduit à un point et on considère \mathbb{R}^n comme le plan affine.

DÉFINITION 241

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. On dit que f tend vers le point $A(x_1, \dots, x_n)$ quand t tend vers t_0 si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|\overrightarrow{Af(t)}\| = 0,$$

où $t_0 \in \bar{I}$ l'intervalle fermé. On écrit alors $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = A$.

DÉFINITION 242

1. On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue en $t_0 \in I$ si $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0)$.
2. On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dérivable en $t_0 \in I$ si $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\overrightarrow{f(t_0)f(t)}}{t - t_0}$ et on note alors $f'(t_0)$ le vecteur limite.

EXEMPLE 243 — Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, 1 + t^2)$. Étudier la continuité de f en 0 :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|f(t) - f(t_0)\| = \lim_{t \rightarrow 0} \|(t, t^2 + 1) - (0, 1)\| = \lim_{t \rightarrow 0} \|(t, t^2)\| = 0.$$

Donc f est continue en 0.

DÉFINITION 244

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto f(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$. On appelle fonctions coordonnées, les fonctions $x_i : I \rightarrow \mathbb{R}$.

PROPOSITION 245

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto (x_1(t), \dots, x_n(t))$.

1. $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = (a_1, \dots, a_n)$ si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lim_{t \rightarrow t_0} x_i(t) = a_i$;
2. La fonction f est continue en t_0 si et seulement si les fonctions coordonnées x_i sont continues en t_0 .
3. La fonction f est dérivable si et seulement si les fonctions coordonnées x_i le sont et alors $f'(t_0) = (x'_1(t_0), \dots, x'_n(t_0))$.

Preuve — 2/ résulte de 1/ et 3/ se montre comme 1/. On va donc juste montrer 1/ : d'après la proposition 240 on l'inégalité avec $A(a_1, \dots, a_n)$

$$\max(|x_1(t) - a_1|, \dots, |x_n(t) - a_n|) \leq \|\overrightarrow{Af(t)}\| \leq |x_1(t) - a_1| + \dots + |x_n(t) - a_n|.$$

Donc si les fonctions coordonnées x_i tendent respectivement vers a_i en t_0 , alors d'après le théorème d'encadrement des limites, $\|\overrightarrow{Af(t)}\|$ tend vers 0 quand t tend vers t_0 et donc par définition f tend vers A en t_0 .

Réciproquement, si f tend vers (a_1, \dots, a_n) quand t tend vers t_0 , alors $\|\overrightarrow{Af(t)}\|$ tend vers 0, mais $\max(|x_1(t) - a_1|, \dots, |x_n(t) - a_n|) \leq \|\overrightarrow{Af(t)}\|$, donc $|x_i(t) - a_i|$ tend vers 0 pour tout i , donc x_i admet bien pour limite a_i en t_0 pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. \square

EXEMPLE 246 — $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\sqrt{1+t^2}, t)$ est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(t) = (\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, 1)$.

4.1.2 Dérivées d'applications classiques

PROPOSITION 247

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux applications dérivables.

1. $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
2. Si $u : J \rightarrow I$ est une fonction dérivable sur J un intervalle de \mathbb{R} , $J \neq \emptyset, \{p\}$, alors $f \circ u$ est dérivable sur J et $(f \circ u)'(t) = u'(t) f'(u(t))$.
3. L'application $\langle f|g \rangle : I \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \langle f(t)|g(t) \rangle$ est dérivable et

$$(\langle f|g \rangle)'(t) = \langle f'(t)|g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle.$$
4. Si $n = 2$ ou 3 , $\det(f, g)$ est dérivable et $(\det(f, g))'(t) = \det(f', g) + \det(f, g')$;
5. En particulier, $(\|f\|^2)' = 2 \langle f, f' \rangle$, d'où $\|f\|' = \frac{\langle f, f' \rangle}{\|f\|}$.
6. Si $n = 3$, $f \wedge g$ est dérivable et $(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$.

Preuve — Seuls 3/ 4/ et 5/ méritent une attention particulière : les formules sont identiques et ce qui est sous-jacent est que le produit scalaire, le déterminant et le produit vectoriel sont des applications linéaires en chacune des variables. Par exemple : on pose $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$ et $g(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t))$, et alors $\langle f(t)|g(t) \rangle = f_1(t)g_1(t) + \dots + f_n(t)g_n(t)$, donc

$$(\langle f(t)|g(t) \rangle)' = \sum_{i=1}^n f'_i(t)g_i(t) + \sum_{i=1}^n f_i(t)g'_i(t) = \langle f'(t)|g(t) \rangle + \langle f(t)|g'(t) \rangle.$$

Faire le calcul pour le déterminant et pour le produit vectoriel. \square

EXERCICE 248 — Si $M(t)$ est un point mobile dans le plan de coordonnées $f(t)$, son vecteur vitesse instanné a pour coordonnées $f'(t)$ (on suppose que f est dérivable). Si $M(t)$ a une vitesse constante, comprendre $\|f'(t)\|$ constant, que dire du vecteur vitesse et du vecteur accélération ?

DÉFINITION 249

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. On dit que f est de classe \mathcal{C}^0 sur I , si f est continue sur I et de classe classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$, si f est k fois dérivable et sa dérivée k -ième est continue. Si f est indéfiniment dérivable, on dit que f est de classe \mathcal{C}^∞ . Si f est de classe \mathcal{C}^k , $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on note $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$.

PROPOSITION 250

On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe \mathcal{C}^k , $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, si ses fonctions coordonnées le sont.

REMARQUE 251 — On a

$$\mathcal{C}^\infty \subset \dots \subset \mathcal{C}^{k+1} \subset \mathcal{C}^k \dots \subset \mathcal{C}^1 \subset \mathcal{C}^0,$$

mais ces inclusions sont strictes ! On verra par exemple qu'il existe des fonctions partout continues sur \mathbb{R} mais nulle part dérivables.

4.2 ARCS PARAMÉTRÉS

On suppose que $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

4.2.1 Définitions

DÉFINITION 252

1. On appelle arc ou courbe paramétré de classe \mathcal{C}^k toute application $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^k . On note alors l'arc (I, f) .
2. On appelle trajectoire (ou support) de l'arc (I, f) l'ensemble $\{f(t), f \in I\}$.

EXEMPLE 253 —

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ et $g : [-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ sont deux arc paramétrés distincts mais de même support le cercle trigonométrique. Ces arcs sont de classe \mathcal{C}^∞ .
2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ est un arc paramétré de support une branche d'hyperbole.

REMARQUE 254 — Si $\varphi \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, \varphi(t))$, alors (I, f) est un arc paramétré de classe \mathcal{C}^k et le support de f est le graphe φ .

4.2.2 Interprétation cinématique

En considérant que la variable t désigne le temps, $f(t)$ repère la position d'un point mobile à l'instant t .

1. Le support de l'arc est la trajectoire.
2. Le vecteur $f'(t)$ est vecteur vitesse instannée.
3. Le vecteur $f''(t)$ est le vecteur accélération instannée.

Pour cette raison, on note souvent $\overrightarrow{0M}'(t)$ ou $\vec{v}(t)$ pour $f'(t)$ et $\overrightarrow{0M}''(t)$ ou $\vec{a}(t)$ pour $f''(t)$.

REMARQUE 255 — Les coordonnées du point $M(t)$ coordonnées $f(t) = (x(t), y(t))$ dépendent de l'origine du repère, tandis que $f'(t)$ et $f''(t)$ n'en dépendent pas puisque $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$.

EXEMPLE 256 — Soit M un point matériel de masse m soumis à une force centrale $\vec{F} = -k\overrightarrow{OM}$. On a $m\overrightarrow{OM}'' = -k\overrightarrow{OM}$, d'après le principe fondamental de la dynamique. Soit $\vec{\sigma} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$, alors

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \overrightarrow{OM}' \wedge m\vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{OM}'' = -k\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{0}.$$

On en déduit que $\vec{\sigma}$ est constant et en particulier \overrightarrow{OM} et \vec{v} reste dans un même plan : c'est-à-dire, un point soumis à une force centrale décrit une trajectoire plane.

4.3 ÉTUDE LOCALE D'UN ARC PARAMÉTRÉ

4.3.1 Tangente en un point de l'arc

§ 1. Généralités Soit (I, f) un arc paramétré de classe \mathcal{C}^1 , $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto M(t)$. On note Γ son support.

DÉFINITION 257

On dit que $M(t)$ est un point régulier si $f'(t) \neq \vec{0}$ et qu'il est stationnaire sinon. Si un arc est régulier en tout point, alors on dit que l'arc est régulier.

EXEMPLE 258 — L'arc $(] - \pi; \pi], (\cos, \sin))$ est régulier car $f'(t) = (-\sin, \cos)$ ne s'annule pas sur $] - \pi; \pi]$.

DÉFINITION 259

Soit un arc paramétré (I, f) de classe \mathcal{C}^1 , $f : t \mapsto f(t) = M(t)$ et soit Γ son support. Soit $t_0 \in I$.

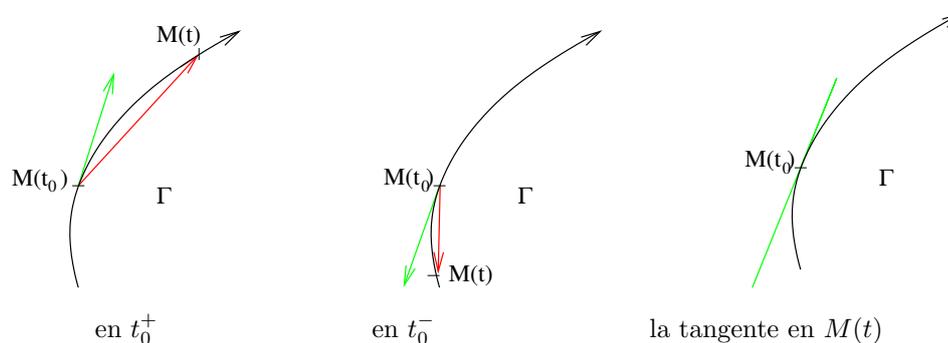
1. On dit que Γ admet une demi-tangente en $M(t_0^+)$ (resp. $M(t_0^-)$) si le vecteur unitaire

$$\frac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{\|M(t_0)M(t)\|} \quad (\text{s'il existe})$$

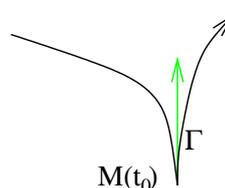
admet une limite lorsque t tend vers t_0^+ (resp. t_0^-). Dans ce cas, on appelle demi-tangente en $M(t_0^+)$ (resp. $M(t_0^-)$) à Γ la demi-droite d'origine $M(t_0)$ et dirigée par cette limite.

2. On dit que Γ admet une tangente en $M(t_0)$ si Γ admet deux demi-tangentes égales ou opposées en $M(t_0^+)$ et $M(t_0^-)$. Dans ce cas, on appelle tangente à Γ en $M(t_0)$ la droite passant par $M(t_0)$ et portant les deux demi-tangentes.

Illustration :



Attention, dans le cas où on a deux demi-tangentes orientés dans le même sens, alors le point est stationnaire ; plus précisément, on parle de point de rebroussement. Il est discutable de parler de tangente en $M(t)$ (cf littérature mathématique).



REMARQUE 260 — Soit $f(t) = (x(t), y(t))$. On peut écrire $\frac{1}{x(t) - x(t_0)} \overrightarrow{M(t_0)M(t)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)} \end{pmatrix}$ et on trouve facilement que

1. si $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)} = m_0$, alors la tangente en $M(t_0)$ à la courbe existe et a pour coefficient directeur m_0 et donc pour équation : $y = m_0(x - x(t_0)) + y(t_0)$.
2. si $f(t) = (x(t), y(t))$ avec $\lim_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)} \right| = +\infty$, alors la tangente en $M(t_0)$ à la courbe existe et a pour équation $x = x_0$.

3. S'il existe une fonction continue $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, qui ne s'annule pas sur $I \setminus \{t_0\}$ telle que $t \mapsto \frac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{\lambda(t)}$ admet une limite $\vec{v} \neq \vec{0}$ en t_0 qui est un vecteur non nul, alors l'arc admet une tangente en $M(t_0)$ dirigée par ce vecteur :

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{\lambda(t)}{\|\overrightarrow{M(t_0)M(t)}\|} \frac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{\lambda(t)} = \pm \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|},$$

suivant le signe de λ qui est constant sur t_0^+ et de même en t_0^-

THÉORÈME 261

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ un arc de classe \mathcal{C}^1 et Γ sa trajectoire. En tout point régulier $M(t_0)$, la courbe Γ admet une tangente de vecteur directeur $f'(t_0)$.

Preuve — On prend $\lambda(t) = t - t_0$ dans le 3/ de la remarque précédente. □

EXEMPLE 262 —

1. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$. L'arc est régulier et en tout point, $M(t)$ un vecteur directeur de la tangente est donné par $(-\sin t, \cos t)$.
2. Si $f(t) = (t^3 + t, 3t^5 - 2t)$ et $I = \mathbb{R}$, alors $f'(t) = (3t^2 + 1, 15t^4 - 2)$ ne s'annule jamais et donc Γ admet une tangente en tout point.

REMARQUE 263 — Le vecteur dérivé n'est pas toujours le "meilleur" vecteur directeur de la tangente : on peut factoriser par un scalaire. L'exemple ci-dessous en montre l'intérêt.

EXEMPLE 264 — Si $x(t) = t - \operatorname{th} t$ et $y(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} t}$, alors $x'(t) = \operatorname{th}^2 t$ et $y'(t) = -\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t} = -\frac{\operatorname{th} t}{\operatorname{ch} t}$ donc en tout point $(x(t), y(t))$ avec $t \neq 0$ un vecteur directeur de la tangente est

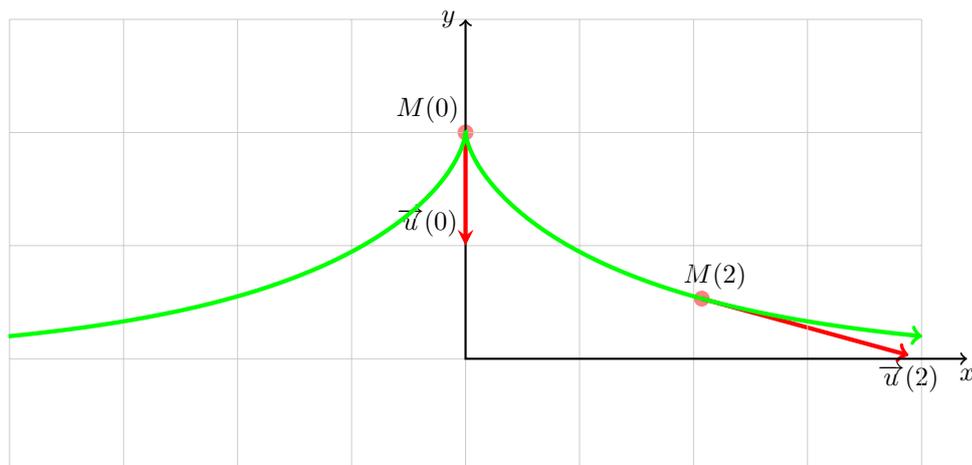
$$\begin{pmatrix} \operatorname{th}^2 t \\ \operatorname{th} t \\ -\frac{\operatorname{th} t}{\operatorname{ch} t} \end{pmatrix} = \frac{\operatorname{th} t}{\operatorname{ch} t} \begin{pmatrix} \operatorname{sh} t \\ -1 \end{pmatrix}$$

et on choisit comme vecteur directeur : $\begin{pmatrix} \operatorname{sh} t \\ -1 \end{pmatrix}$ car $\operatorname{th} t$ et $\operatorname{ch} t$ ne s'annulent pas pour $t \neq 0$, d'où l'équation de la tangente : $x + (\operatorname{sh} t)y = t$.

Si $t = 0$, $f(0)$ est stationnaire et

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{M(0)M(t)}}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \begin{pmatrix} t - \operatorname{th} t \\ \frac{1}{\operatorname{ch} t} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

donc on a une tangente verticale et le vecteur $\begin{pmatrix} \operatorname{sh} t \\ -1 \end{pmatrix}$ convient encore ! (on a factorisé par le terme qui s'annulait en 0).



4.3.2 Formules de Taylor vectorielle

On rappelle d'abord les différentes versions de la formule de Taylor dans le sens décroissant (des hypothèses de moins en moins fortes pour un résultat de moins en moins précis). On a donc, Taylor avec reste intégrable, Taylor-Lagrange et Taylor-Young :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$, alors $\forall x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \begin{cases} \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt & \text{(Taylor - Int.)} \\ \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c), \exists c \in]a; x[& \text{(Taylor - Lagrange)} \\ o((x-a)^n) & \text{(Taylor - Young)} \end{cases}$$

où les hypothèses sont $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ (T-I), $f \in \mathcal{D}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ (T-L) et $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ (T-Y).

On a enfin l'inégalité de Taylor-Lagrange, si $f \in \mathcal{D}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ et $|f^{(n+1)}|$ majorée sur I par un réel M (existe par exemple si I segment et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$) alors

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

PROPOSITION 265

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto (x_1(t), \dots, x_n(t))$ est de classe \mathcal{C}^n , la formule de Taylor Young appliquée à chacune de ses composantes donne

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=0}^n \frac{(t-t_0)^k}{k!} f^{(k)}(t_0) + (t-t_0)^n \varepsilon(t) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(t-t_0)^k}{k!} \begin{pmatrix} x_1^{(k)}(t_0) \\ \vdots \\ x_n^{(k)}(t_0) \end{pmatrix} + (t-t_0)^n \begin{pmatrix} \varepsilon_1(t) \\ \vdots \\ \varepsilon_n(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon_1(t) = \dots = \lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon_n(t) = 0$; on note encore

$$f(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(t-t_0)^k}{k!} f^{(k)}(t_0) + o((t-t_0)^n),$$

c'est la formule de Taylor Young vectorielle.

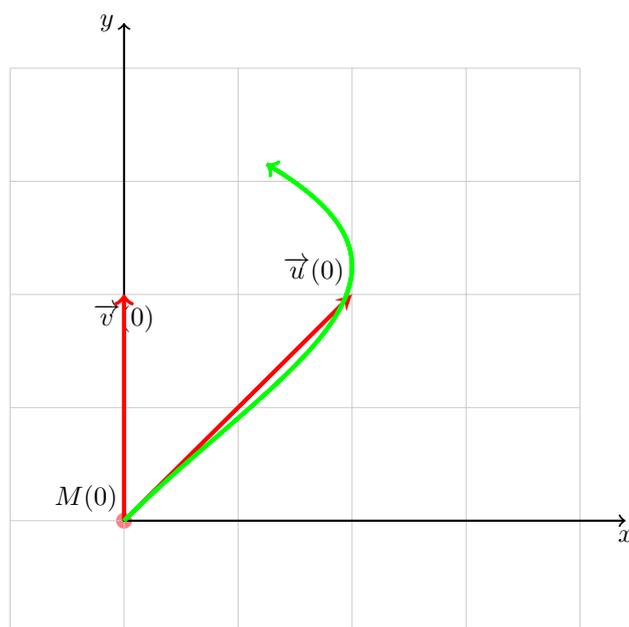
REMARQUE 266 — L'écriture vectorielle $o((t - t_0)^n)$ signifie que la fonction vectorielle s'écrit sous la forme $(t - t_0)^n g(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} \|g(t)\| = 0$.

EXEMPLE 267 — La fonction $t \mapsto (\sin t^2, t \arctan t)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

On sait que $\sin t =_0 t - \frac{t^3}{6} + o(t^5)$ et $t \arctan t =_0 t^2 - \frac{t^4}{3} + o(t^6)$. On en déduit que

$$f(t) = t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{t^4}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + o(t^5)$$

La courbe admet un point stationnaire en 0, mais d'après le développement limité en 0 de f , la courbe paramétrée (\mathbb{R}, f) admet-elle une tangente en 0 ?



4.3.3 Étude locale en un point

On suppose donc que l'arc est de classe \mathcal{C}^n et qu'il existe un plus petit entier $p \geq 1$ tel que $f^{(p)}(t_0) \neq 0$ et un plus petit entier $q \geq 2$ tel que $(f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$ est libre ($p, q \leq m$).

La formule de Taylor Young donne :

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)^p \sum_{k=p}^{q-1} \frac{(t - t_0)^{k-p}}{k!} f^{(k)}(t_0) + \frac{(t - t_0)^q}{q!} f^{(q)}(t_0) + o(t - t_0)^q$$

Puis $\forall k \in \llbracket p, q-1 \rrbracket \quad \exists \lambda_k \in \mathbb{R} \quad f^{(k)}(t_0) = \lambda_k f^{(p)}(t_0)$, d'où

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)^p \left(\frac{1}{p!} + \sum_{k=p+1}^{q-1} \frac{(t - t_0)^{k-p}}{k!} \lambda_k \right) f^{(p)}(t_0) + \frac{(t - t_0)^q}{q!} f^{(q)}(t_0) + o(t - t_0)^q$$

$$\overrightarrow{M(t)M(t_0)} = \left(\frac{(t - t_0)^p}{p!} + o(t - t_0)^p \right) f^{(p)}(t_0) + \frac{(t - t_0)^q}{q!} f^{(q)}(t_0) + o(t - t_0)^q$$

PROPOSITION 268

Avec les notations précédentes, si $f^{(p)}(t_0)$ existe, alors l'arc (I, f) admet une tangente en $M(t_0)$ dirigée par $f^{(p)}(t_0)$.

Preuve — On pose $\lambda(t) = (t - t_0)^p$ et on applique la proposition plus haut. □

DÉFINITION 269

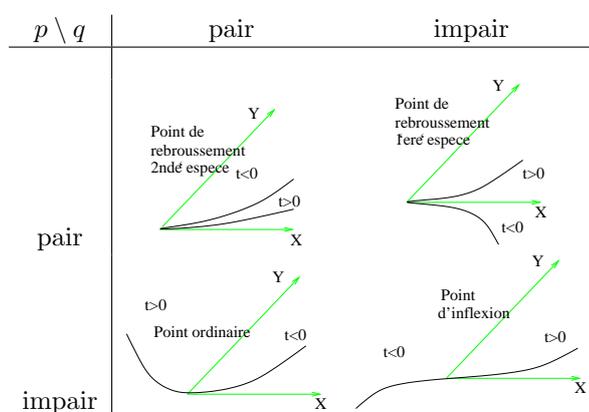
Le plan \mathcal{P} engendré par $f^{(p)}(t_0)$ et $f^{(q)}(t_0)$ et passant par $M(t_0)$ est le plan osculateur à l'arc Γ au point $M(t_0)$.

On dispose donc d'un repère de $\mathcal{P} : (M(t_0), f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$ que l'on complète en un repère $(M(t_0), f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$

Dans ce nouveau repère, les coordonnées $(X_1(t), \dots, X_n(t))$ de $M(t)$ vérifient

$$\begin{cases} X_1(t) \underset{t \rightarrow t_0}{\sim} \frac{(t-t_0)^p}{p!} \\ X_2(t) \underset{t \rightarrow t_0}{\sim} \frac{(t-t_0)^q}{q!} \\ X_i(t) \underset{t \rightarrow t_0}{=} o(t-t_0)^q \text{ si } i \geq 3 \end{cases}$$

Dans le cas $n = 2$ (courbes planes), on déduit quatre cas de figure



DÉFINITION 270

- On dit qu'un point de l'arc $M(t_0)$ est un point birégulier si $(f'(t_0), f''(t_0))$ est une famille libre. En particulier, si $n = 2$ $M(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ est birégulier ssi $x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0) \neq 0$
- Lorsque tous les points sont biréguliers sur l'arc, on dit que l'arc est birégulier.

REMARQUE 271 — Un point birégulier est un point ordinaire.

REMARQUE 272 — Si l'arc est suffisamment régulier on pourrait trouver une suite p_1, \dots, p_n la plus petite possible telle que $(f^{(p_1)}(t_0), \dots, f^{(p_n)}(t_0))$ forme une base de \mathbb{R}^n , en particulier en dimension 3 cela permet de déterminer de quel côté du plan osculateur se trouve la courbe au voisinage de t_0 .

EXEMPLE 273 — Étudier la nature des points des courbes ci-dessous

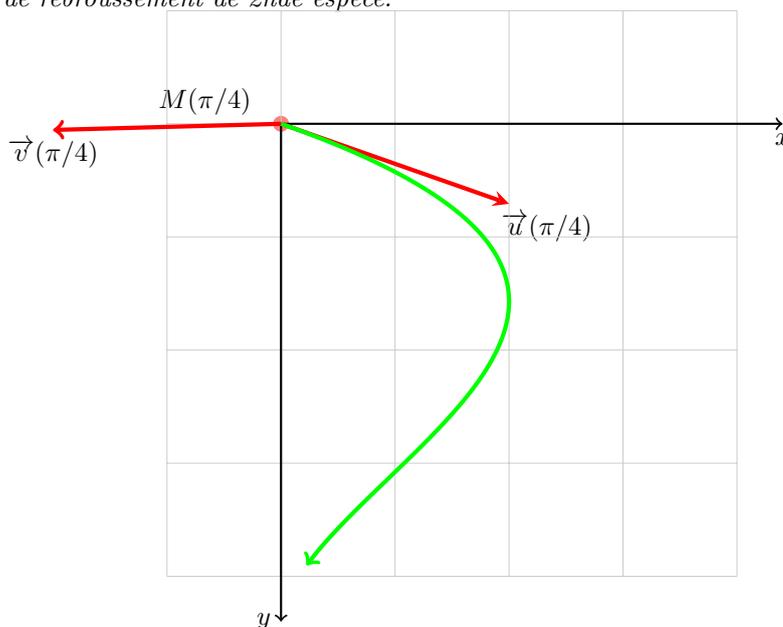
- $\begin{cases} x(t) = \cos^2 2t \\ y(t) = 1 + (t - \frac{\pi}{4})(\cos t - \sin t) \end{cases} \quad t = \frac{\pi}{4}$
- $\begin{cases} x(t) = 1 + (t-1)^2 + 2(t-1)^3 + (t-1)^5 \\ y(t) = 2(t-1)^2 + 4(t-1)^3 \end{cases} \quad t = 1$
- $\begin{cases} x(t) = 3 + (t+2)^3 + 2(t+2)^5 \\ y(t) = 2 + t - (t+2)^3 \end{cases} \quad t = -2$

On calcule les développements limités :

1. On pose $t = u + \frac{\pi}{4}$.

$$\begin{cases} x(u) = \cos^2(2u + \frac{\pi}{2}) = \frac{1 - \cos(4u)}{2} \\ y(u) = 1 + (t - \frac{\pi}{4})(\cos t - \sin t) = 1 - \sqrt{2} u \sin u \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u^2 \begin{pmatrix} 4 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} + \frac{u^4}{6} \begin{pmatrix} -2^5 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + o(u^5)$$

C'est un point de rebroussement de 2^{de} espèce.



2. On a $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (t-1)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (t-1)^3 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + (t-1)^5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
C'est un point de rebroussement de première espèce.
3. On a $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + (t+2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (t+2)^3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} o((t+2)^4)$.
C'est un point d'inflexion.

PROPOSITION 274

Soit $M(t)$ a pour coordonnées (x, y) une courbe paramétrée plane. On suppose qu'il existe des entiers p et q comme précédemment

Si $M(t_0)$ est un point d'inflexion, alors $x'y'' - x''y'$ s'annule et change de signe en t_0 .

Si $M(t_0)$ est de plus un point régulier, alors la condition est suffisante.

Preuve — (de la proposition)

En effet, si $M(t_0)$ est birégulier, alors $M(t_0)$ est un point ordinaire; par contraposée, si $M(t_0)$ est un point d'inflexion, ce n'est pas un point ordinaire et donc $M(t_0)$ n'est pas birégulier, d'où l'annulation de $x'y'' - x''y'$ en t_0 .

De plus, posons $g(x) = x'y'' - x''y'$. En se plaçant dans le repère $(M(t_0), f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$, on vérifie facilement que

$$g \sim_0 A(t - t_0)^{p+q-3}$$

et donc g s'annule et change de signe ssi $p+q$ est pair, en particulier, pour un point d'inflexion.

Enfin, si de plus $M(t_0)$ est régulier, alors $p=1$ et le couple (p, q) correspond donc à un point d'inflexion. \square

4.3.4 Étude des branches infinies

§ 1. Définitions

DÉFINITION 275

L'arc (I, f) admet une branche infinie en t_0 si $\lim_{t \rightarrow t_0} \|f(t)\| = +\infty$.

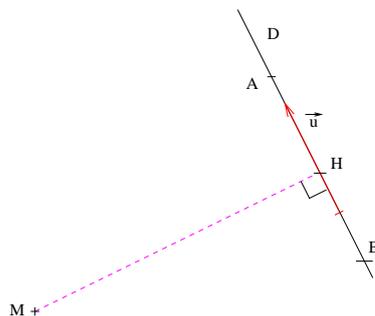
REMARQUE 276 — C'est en particulier le cas si x ou y tend vers l'infini quand t tend vers t_0 , mais ce n'est pas le seul cas, comme le montre l'exemple : $(t \cos t, t \sin t)$ en $t_0 = +\infty$.

PROPOSITION 277

On en déduit que l'arc (I, f) admet la droite d'équation $ax + by + c = 0$ pour asymptote en t_0 si et seulement

$$\lim_{t \rightarrow t_0} ax(t) + by(t) + c = 0, \text{ où } f(t) = (x(t), y(t)) \text{ puisque } d(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax(t) + by(t) + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Preuve — Soit H le projeté orthogonal de M sur \mathcal{D} .



Il faut calculer MH , or H est aussi le projeté orthogonal de A sur la droite passant par M et dirigée par le vecteur normal $\vec{n}(\beta, -\alpha)$ à \mathcal{D} . La formule du produit scalaire nous dit que

$$HM = \frac{|\overrightarrow{MA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|\beta(x - a_1) - \alpha(y - a_2)|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

De même si $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de \mathcal{D} , alors un vecteur normal est $\vec{n}(a, b)$ et $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = ax + by + c$, d'où le résultat. \square

DÉFINITION 278

On dit que \mathcal{D} est une droite asymptote à l'arc (I, f) en t_0 si (I, f) admet une branche infinie en t_0 et si la distance de $M(t)$ à la droite \mathcal{D} tend vers 0 quand t tend vers t_0 .

PROPOSITION 279

Si M pour coordonnées (α, β) et \mathcal{D} a pour équation $ax + by + c = 0$ dans un repère orthonormé, alors

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

On en déduit que l'arc (I, f) admet la droite d'équation $ax + by + c = 0$ pour asymptote en t_0 si et seulement $\lim_{t \rightarrow t_0} ax(t) + by(t) + c = 0$, où $f(t) = (x(t), y(t))$.

§ 2. Recherche d'une branche infinie

PROPOSITION 280

Soit $t_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

1. Si $\lim_{t \rightarrow t_0} x = \pm\infty$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} y = b \in \mathbb{R}$, alors Γ admet une asymptote horizontale.
2. Si $\lim_{t \rightarrow t_0} x = a \in \mathbb{R}$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} y = \pm\infty$, alors Γ admet une asymptote verticale.
3. Si $|x|$ et $|y|$ admettent tous deux $+\infty$ pour limite en t_0 , on étudie $\frac{y}{x}$

(a) Si $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y}{x} = a \in \mathbb{R}^*$, on cherche $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) - ax(t)$:

i. Si $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) - ax(t) = \pm\infty$, on dit que Γ admet une branche parabolique dans la direction $y = ax$.

ii. Si $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) - ax(t) = b \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote et pour étudier la position cette droite par rapport à la courbe Γ on étudie le signe de $y(t) - ax(t) - b$.

(b) Si $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y}{x} = 0$ (resp. $\pm\infty$), alors Γ admet une branche infinie parabolique dans la direction $(0x)$ (resp. $(0y)$). On peut alors chercher une parabole ou une exponentielle asymptote (cf exemples plus loin).

EXEMPLE 281 —

1. Étudier les asymptotes du support de l'arc défini par $M(t)$ de coordonnées $(t + 1, \frac{t^2 + 1}{t - 1})$.

2. Même question avec $M(t)$ de coordonnées (t, \sqrt{t}) pour $t \in \mathbb{R}_+^*$.

EXEMPLE 282 — Étude de $t \mapsto M(t) = \begin{cases} x(t) = \frac{t^3}{1+3t} \\ y(t) = \frac{3t^2}{1+3t} \end{cases}$.

On a des branches infinies en $-\infty$, en $-\frac{1}{3}$ et en $+\infty$.

i) Étude en $-\frac{1}{3}$: on a

$$\lim_{t \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{3}{t} = -9 = a,$$

puis on calcule $y(t) - ax(t) = y(t) + 9x(t) = \frac{3t^2 + 9t^3}{1 + 3t} = 3t^2$, donc

$$\lim_{t \rightarrow -\frac{1}{3}} y(t) + 9x(t) = \frac{1}{3}.$$

La droite d'équation $y = -9x + \frac{1}{3}$ est donc asymptote à la courbe.

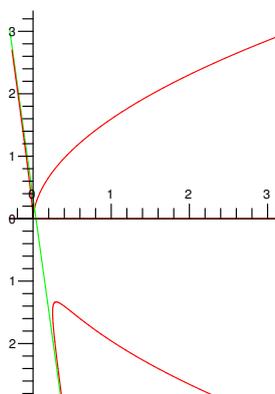
Pour déterminer sa position, il faut encore déterminer le signe de $y(t) + 9x(t) - \frac{1}{3} = 3t^2 - \frac{1}{3}$:

- $3t^2 - \frac{1}{3} < 0$ si $t > -\frac{1}{3}$ et $|t| < \frac{1}{3}$, donc la courbe est en dessous de l'asymptote ;

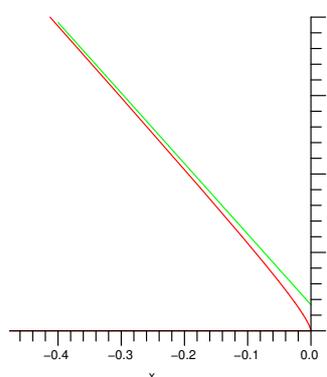
- $3t^2 - \frac{1}{3} > 0$ si $t < -\frac{1}{3}$ et $|t| > \frac{1}{3}$, donc la courbe est au-dessus de l'asymptote.

ii) Étude en $\pm\infty$: on a $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |x(t)| = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = +\infty$, on est donc dans le cas 3) et de plus

$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{3}{t} = 0$, donc la courbe admet une branche parabolique de direction (Ox) . En fait Γ admet une parabole asymptote.



Le support Γ .



L'asymptote est bien au-dessus de la courbe

4.4 TRACÉ DES SUPPORTS DONNÉS EN COORDONNÉES CARTÉSIENNES

Soit (I, f) un arc paramétré, on note x et y les applications coordonnées. On veut tracer Γ le support de l'arc. Pour cela, on procède en quatre étapes :

1. Réduction du domaine d'étude ;
2. Étude des variations de x et y ;
3. Étude locale à partir des variations :
 - (a) les points stationnaires (tels que $f'(t) = (0, 0)$) ;
 - (b) les branches infinies
4. Tracer la courbe :
 - (a) Placer les points significatifs de la courbe ;
 - (b) Placer les tangentes et les asymptotes éventuelles ;
 - (c) Puis tracer la courbe de façon cohérente avec l'étude.

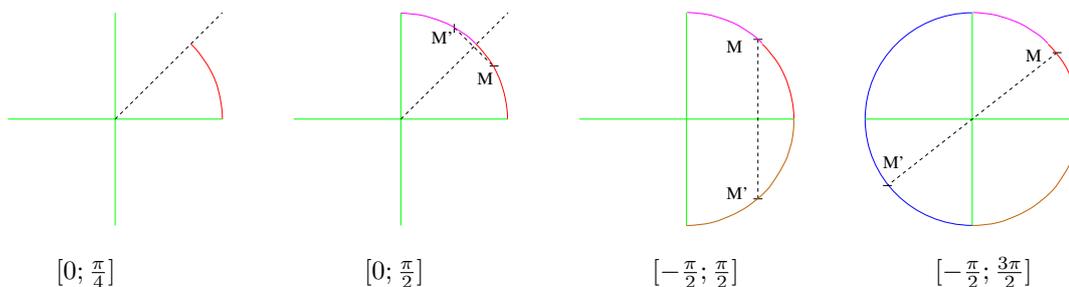
4.4.1 Réduction du domaine d'étude

Le principe est le suivant : f est définie sur I , mais pour tracer le support de (I, f) il suffit d'étudier l'arc sur une partie de I puis faire des transformations successives (symétries, translation...). Pour mieux comprendre étudions l'exemple suivant :

EXEMPLE 283 — Tracer le support de l'arc $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos t, \sin t)$.

1. Les fonctions \cos et \sin étant 2π -périodiques, il suffit d'étudier l'arc sur un intervalle de longueur 2π que l'on prend le plus souvent (mais pas toujours) centré en 0 : $[-\pi; \pi]$; ici on ne perd rien du support.
2. Ensuite, $f(t + \pi) = (\cos(t + \pi), \sin(t + \pi)) = -f(t)$, donc il suffit d'étudier l'arc sur un intervalle de longueur π puis faire une symétrie centrale pour obtenir l'arc sur un intervalle de longueur 2π : ici on choisit $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.
3. On remarque que $f(-t) = (\cos(-t), \sin(-t)) = (\cos t, -\sin t)$; on fait donc une étude sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, puis on fait une symétrie orthogonale d'axe d'axe $(0, x)$ pour obtenir l'étude sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.
4. Enfin, $f(\frac{\pi}{2} - t) = (\cos(\frac{\pi}{2} - t), \sin(\frac{\pi}{2} - t)) = (\sin t, \cos t)$, et donc il suffit de faire une étude sur $[0; \frac{\pi}{4}]$ puis on fait une symétrie d'axe $y = x$ pour obtenir l'étude sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

Ceci donne :



Les types de transformation à rechercher sont

$$1/ t \mapsto -t \quad 2/ t \mapsto t + T \quad 3/ t \mapsto T - t \quad 4/ t \mapsto \frac{1}{t}$$

et on fait un petit schéma pour comprendre quelle symétrie, translation ou rotation il faut faire.

EXEMPLE 284 — Tracer le support de l'arc $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos 2t, \cos 3t)$.

On commence par réduire le domaine d'étude :

1. Les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont 2π -périodiques, donc on peut restreindre l'étude à un intervalle de longueur 2π sans perte.
2. On a $x(t + \pi) = x(t)$ et $y(t + \pi) = -y(t)$, donc on peut faire une étude sur un intervalle de longueur π , puis faire une symétrie d'axe (Ox) pour retrouver toute la courbe. On choisit un intervalle centré en 0 : $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
3. Enfin, $x(t)$ et $y(t)$ sont paires, donc il suffit d'étudier l'arc sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

Puis on étudie les variations de x et y : $x'(t) = -2 \sin 2t$ et $y'(t) = -3 \sin 3t$.

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
x'	0	-	$-\sqrt{3}$	-	0
x	1	\searrow	$-\frac{1}{2}$	\searrow	-1
y	1	\searrow	-1	\nearrow	0
y'	0	-	0	+	3

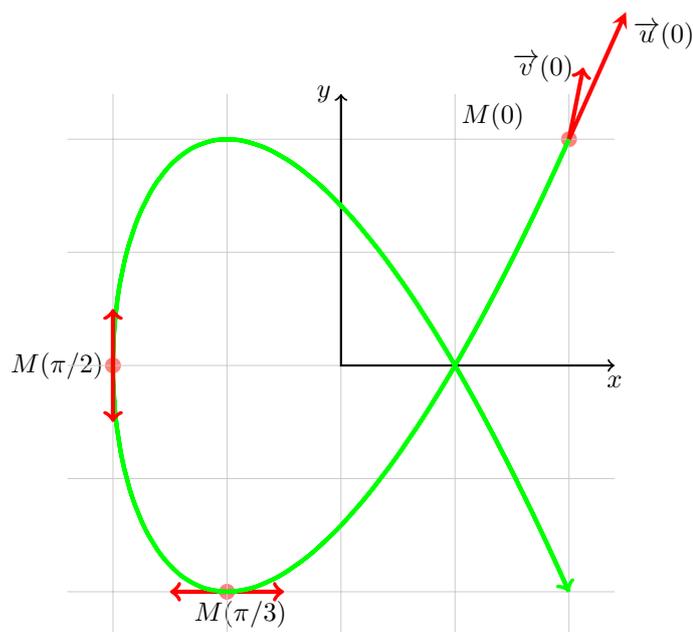
On remarque qu'il n'y a pas de branches infinies, mais on a un point stationnaire en $t = 0$.

Pour étudier le point stationnaire, on calcule la limite de y'/x' :

$$\begin{cases} \cos 2t = 1 - 2t^2 + \frac{2}{3}t^4 + o(t^5) \\ \cos 3t = 1 - \frac{9}{2}t^2 + \frac{27}{8}t^4 + o(t^5) \end{cases}$$

ce qui montre que l'arc admet une tangente en $M(0)$ de coefficient directeur $\frac{9}{4}$.

On place les points les points correspondant à $t = 0$, $t = \frac{\pi}{3}$ et $t = \frac{\pi}{2}$ avec les tangentes correspondantes, et enfin la courbe.



EXEMPLE 285 — $\begin{cases} x(t) = 6t^2 + 4t^3 + t^4 \\ y(t) = 3t^2 + 2t^3 \end{cases}$, on calcule

$$x'y'' - x''y' = (12t + 12t^2 + 4t^3)(6 + 12t) - (12 + 24t + 12t^2)(6t + 6t^2) = -24t^3(t + 2)$$

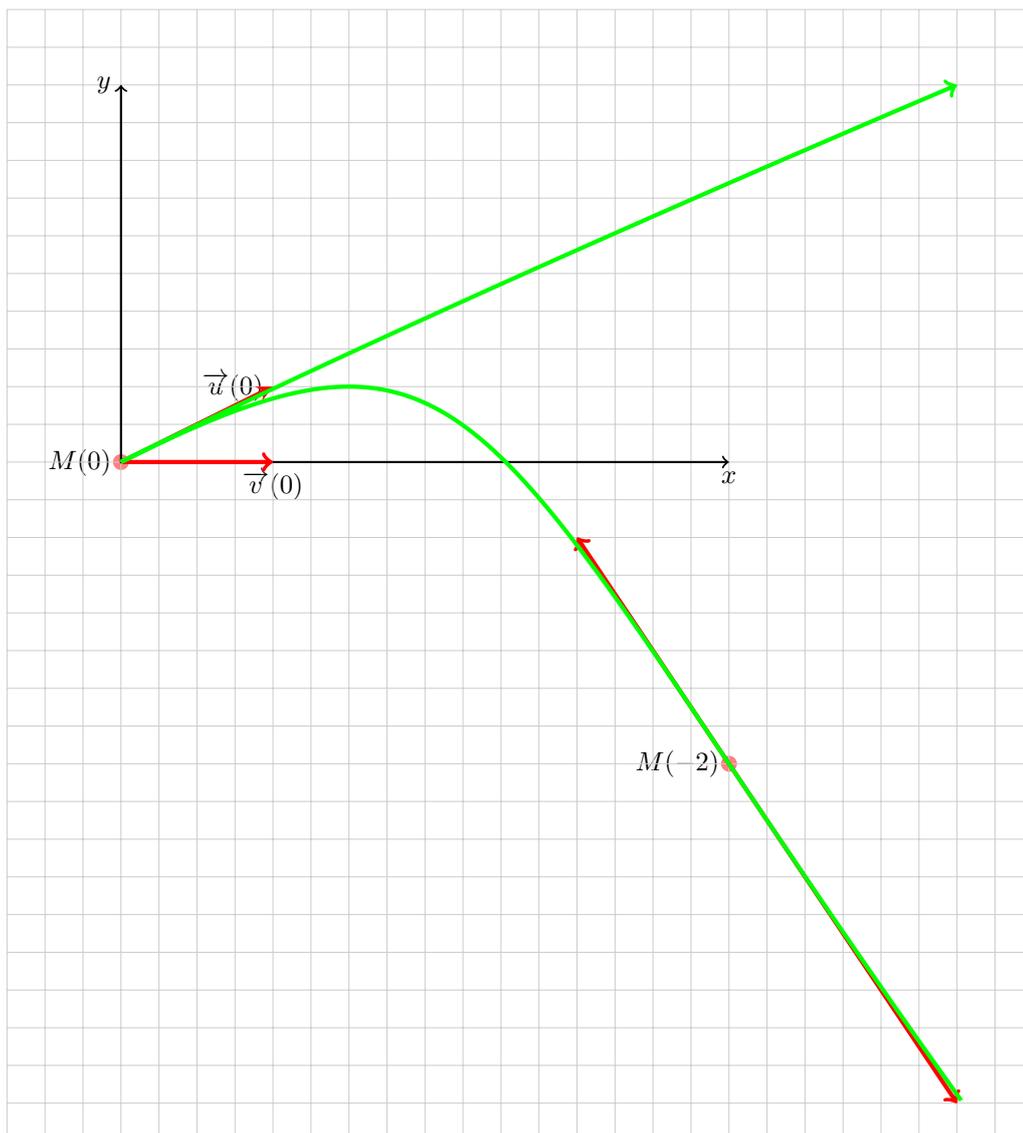
donc les seuls points pouvant être des points d'inflexion sont $M(0)$ et $M(-2)$.

Comme $M(0)$ est stationnaire, on doit calculer le développement limité de f en 0

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = 3t^2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2t^3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t^4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

montre que $M(0)$ est un point de rebroussement de seconde espèce,

Quant à $M(-2)$, ce n'est pas un point stationnaire et $x'y'' - x''y' = -24t^3(t + 2)$ s'annule et change de signe, donc c'est un point d'inflexion.



4.4.2 Un exemple complet

REMARQUE 286 —

1. La condition $x'y'' - x''y'$ s'annule et change de signe en t_0 n'est que nécessaire : ce peut être un point de rebroussement de seconde espèce.
2. En un point d'inflexion, la pente de la tangente $\frac{y'}{x'}$ inverse sa monotonie en t_0 : en effet

$$\left(\frac{y'}{x'}\right)' = \frac{x'y'' - x''y'}{(x')^2}$$

s'annule et change de signe. Il faut dans ce cas que la pente soit définie : il se peut que la courbe ne soit pas définie en t_0 , mais que le quotient $\frac{x'y'' - x''y'}{(x')^2}$ le soit après simplification. Il faut donc vérifier a posteriori que

$$\left(\frac{y'}{x'}\right)' (x'(t))^2$$

s'annule bien et change de signe.

3. Si on ne suppose plus l'existence du couple (p, q) , alors la situation devient beaucoup plus complexe, pensez par exemple à $x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$.

EXEMPLE 287 — $t \mapsto M(t) \begin{cases} x(t) = \frac{t^3}{1+3t} \\ y(t) = \frac{3t^2}{1+3t} \end{cases}$

1. M est défini sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$, et on a $\begin{cases} x'(t) = \frac{3t^2(1+2t)}{(1+3t)^2} \\ y'(t) = \frac{3t(2+3t)}{(1+3t)^2} \end{cases}$, d'où le tableau des variations de x et

y :

t	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$					
x'		$-$	0	$+$		$+$	0	$+$				
x	$+\infty$	\searrow	$\frac{8}{27}$	\searrow	$\frac{1}{4}$	\nearrow	$+\infty$	$-\infty$	\nearrow	0	\nearrow	$+\infty$
y	$-\infty$	\nearrow	$-\frac{4}{3}$	\searrow	$-\frac{3}{2}$	\searrow	$-\infty$	$+\infty$	\searrow	0	\nearrow	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$-$		$-$	0	$+$			

2. $M(0)$ est l'unique point stationnaire ;

Au voisinage de zéro, $\begin{cases} x(t) = t^3(1 - 3t + o(t)) = t^3 - 3t^4 + o(t^4) \\ y(t) = 3t^2(1 - 3t + o(t)) = 3t^2 - 9t^3 + o(t^3) \end{cases}$,

d'où $\overrightarrow{OM}(t) = 3t^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \end{pmatrix} + o(t^3)$.

Au point stationnaire de coordonnées $(0,0)$ la tangente est dirigée par le vecteur de coordonnées $(0,1)$ et il s'agit d'un point de rebroussement de première espèce.

3. On va calculer $x'y'' - x''y'$ à partir de $\left(\frac{x'}{y'}\right)'$, car le calcul est plus simple. Pour tout $t \neq -\frac{2}{3}$, $\frac{x'}{y'} = \frac{t(2t+1)}{3t+2}$ et donc

$$\begin{aligned} \left(\frac{x'}{y'}\right)' &= \frac{(4t+1)(3t+2) - 3(2t^2+t)}{(3t+2)^2} \\ &= \frac{12t^2 + 11t + 2 - 6t^2 - 3t}{(3t+2)^2} \\ &= \frac{6t^2 + 8t + 2}{(3t+2)^2} = \frac{2(t+1)(3t+1)}{(3t+2)^2} \end{aligned}$$

On en déduit : $\left(\frac{x'}{y'}\right)' y'^2 = \frac{18t^2(t+1)}{(1+3t)^3}$, et ainsi $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$, $(x''y' - x'y'')(t) = \frac{18t^2(t+1)}{(1+3t)^3}$, égalité encore vraie pour $t = -\frac{2}{3}$ par continuité. Cette expression ne s'annule et change de signe que pour $t = -1$ et le point $M(-1)$ de coordonnées $(1/2, -3/2)$ n'est pas un point stationnaire, c'est donc un point d'inflexion.

4. Il y a une branche infinie lorsque $t \rightarrow -\frac{1}{3}$ et une branche infinie lorsque $t \rightarrow \pm\infty$.

— Etude lorsque $t \rightarrow -\frac{1}{3}$:

$\frac{y}{x}(t) \rightarrow -9$, puis $y(t) + 9x(t) = \frac{3t^2+9t^3}{1+3t} = 3t^2$, donc $\lim_{t \rightarrow -\frac{1}{3}} y(t) + 9x(t) = \frac{1}{3}$; on en déduit que

la droite d'équation $y + 9x - \frac{1}{3} = 0$ est droite asymptote lorsque $t \rightarrow -\frac{1}{3}$; et que de plus, pour $t < -\frac{1}{3}$, la courbe est au-dessus de l'asymptote, et pour $t > -\frac{1}{3}$, la courbe est en-dessous de son asymptote.

— Etude lorsque $t \rightarrow \pm\infty$: on a $\begin{cases} x(t) \sim \frac{t^2}{3} \\ y(t) \sim t \end{cases}$.

On peut éliminer le terme en t^2 ,

$$y^2(t) - 3x(t) = \frac{9t^4 - 3t^3(1+3t)}{(1+3t)^2} = \frac{-3t^3}{(1+3t)^2}.$$

Puis le terme en t ,

$$y^2(t) - 3x(t) + \frac{1}{3}y(t) = \frac{-3t^3 + t^2(1+3t)}{(1+3t)^2} = \frac{t^2}{(1+3t)^2}.$$

On obtient une limite finie

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y^2(t) - 3x(t) + \frac{1}{3}y(t) = \frac{1}{9},$$

donc la courbe admet pour asymptote la parabole d'équation

$$y^2 + \frac{1}{3}y - 3x = \frac{1}{9}.$$

Si $(x(t), y(t)) \in C$ et $x \in \mathbb{R}$, tel que $(x, y(t))$ appartient à la parabole, alors

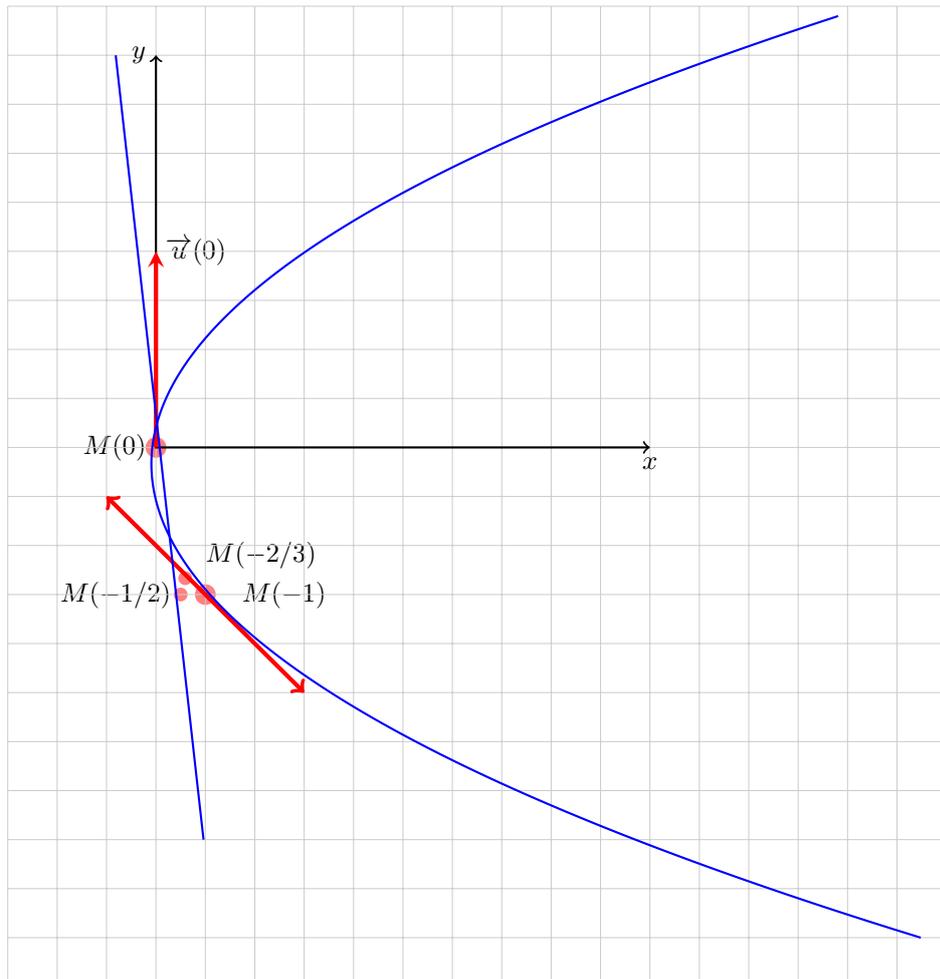
$$\begin{cases} x(t) &= \frac{1}{3} \left(y^2(t) + \frac{1}{3}y(t) - \frac{t^2}{(1+3t)^2} \right) \\ x &= \frac{1}{3} \left(y^2(t) + \frac{1}{3}y(t) - \frac{1}{9} \right). \end{cases}$$

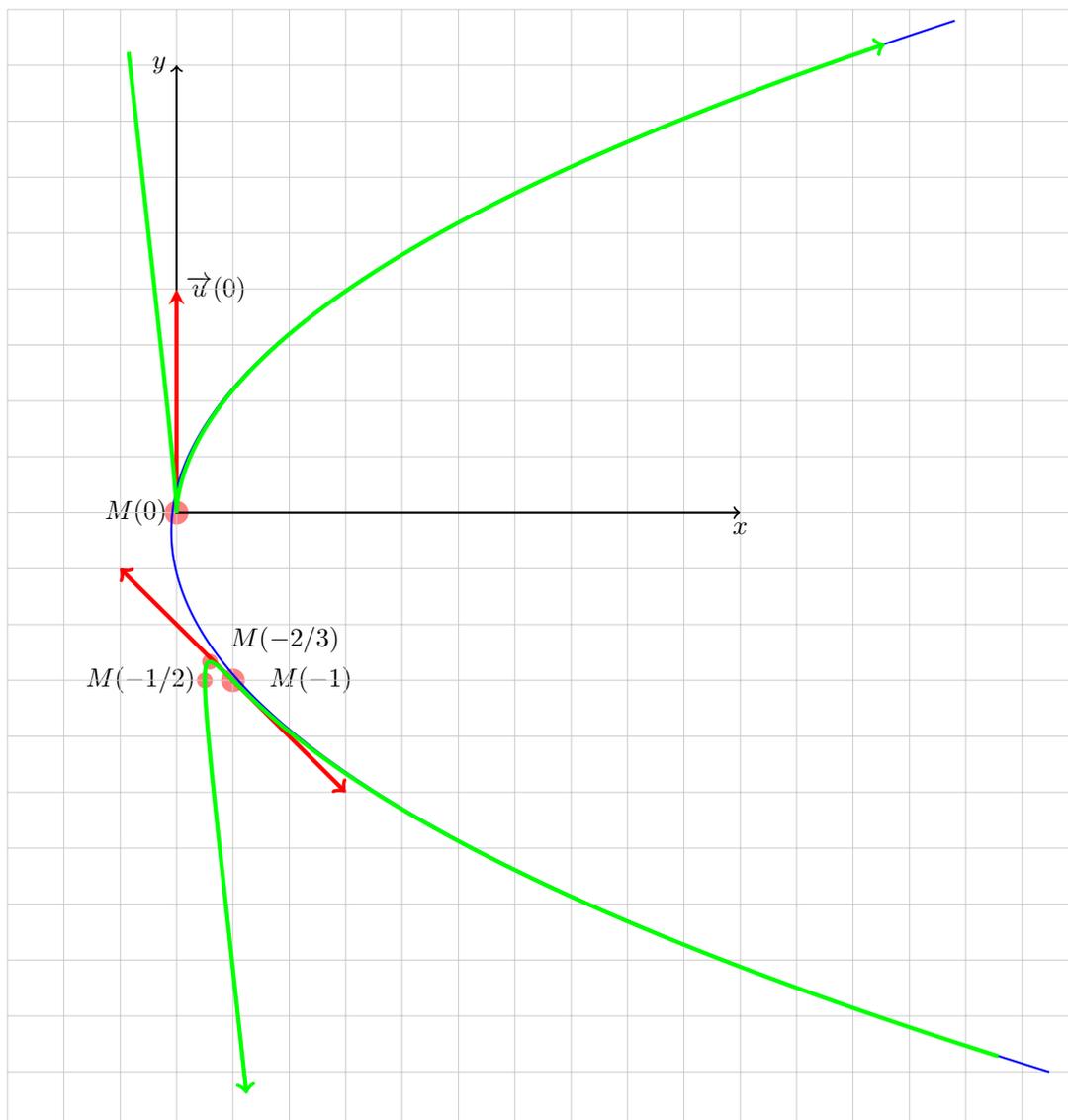
On en déduit que la position de la courbe par rapport à cette parabole asymptote est donnée par le signe de

$$\frac{1}{9} - \frac{t^2}{(1+3t)^2} = \frac{6t+1}{9(1+t)^2}.$$

- Lorsque $t > -\frac{1}{6}$, $x(t) > x$, d'où, à l'altitude y , le point de C est à droite du point de la parabole
- Lorsque $t < -\frac{1}{6}$, $x(t) < x$, d'où, à l'altitude y , le point de C est à gauche du point de la parabole.

5. On peut maintenant tracer la courbe :





4.5 ÉTUDE DE COURBES PARAMÉTRÉES EN POLAIRES

4.5.1 Représentation polaire

On note $\vec{u}(\theta) = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ et $\vec{v}(\theta) = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$.

DÉFINITION 288

Soit (I, f) , un arc paramétré de classe C^k . Une écriture de la forme $f(t) = \rho(t) \vec{u}(\theta(t))$, avec $\theta(t)$ et $\rho(t)$ des fonctions de classe C^k s'appelle représentation polaire de l'arc (I, f) .

REMARQUE 289 —

1. Dans tous les cas que nous étudierons ici, on prendra $\theta(t) = t$ ou plutôt, on considèrera que le paramètre est θ ; par exemple $\rho = a \cos \theta + b \sin \theta$ (qui représente un cercle passant par l'origine !)
2. Il ne faut pas oublier que ρ peut prendre des valeurs négatives.
3. On rappelle que les fonctions (vectorielles) $\theta \mapsto \vec{u}(\theta)$ et $\theta \mapsto \vec{v}(\theta)$ sont dérivables et que

$$\vec{u}'(\theta) = \vec{v}(\theta) \quad \vec{v}'(\theta) = -\vec{u}(\theta).$$

4. On en déduit que si $M(t)$ est donnée en coordonnées polaires, alors $\overrightarrow{OM}(t) = \rho(t)\vec{u}(\theta(t))$ et

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \rho'(t)\vec{u}(\theta(t)) + \rho(t)\theta'(t)\vec{v}(\theta(t)),$$

et on peut aussi calculer l'accélération.

4.5.2 Étude d'une courbe définie par une équation polaire

§ 1. Réduction du domaine d'étude On adopte la convention suivante : $(\theta \mapsto f(\theta)) \leftrightarrow (\rho \mapsto g(\rho))$ signifie, si on change θ par $f(\theta)$, alors ρ est changé en $g(\rho)$.

Ainsi,

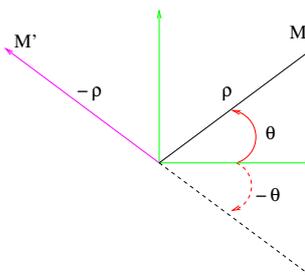
1. Si $(\theta \mapsto \theta + 2k\pi) \leftrightarrow (\rho \mapsto \rho)$, alors étude sur I de longueur $2k\pi$;
2. Si $(\theta \mapsto \theta + 2k\pi) \leftrightarrow (\rho \mapsto -\rho)$, alors étude sur I de longueur $2k\pi$, puis symétrie en 0 ;
3. Si $(\theta \mapsto \frac{p}{q}\pi + \theta) \leftrightarrow (\rho \mapsto \rho)$, alors étude sur I de longueur $\frac{p}{q}\pi$ puis faire $2q - 1$ rotations de $\frac{p}{q}$;
4. Si $(\theta \mapsto -\theta) \leftrightarrow (\rho \mapsto -\rho)$, alors étude sur \mathbb{R}^+ puis symétrie d'axe $(0, y)$;
5. Si $(\theta \mapsto \theta_0 - \theta) \leftrightarrow (\rho \mapsto -\rho)$, alors étude sur $[\frac{\theta_0}{2}; +\infty[$ puis symétrie par rapport à la droite $\theta = \frac{\theta_0}{2} + \frac{\pi}{2}$; en effet, si $\theta = \frac{\theta_0}{2} + a$, alors $\theta_0 - \theta = \frac{\theta_0}{2} - a$.

REMARQUE 290 —

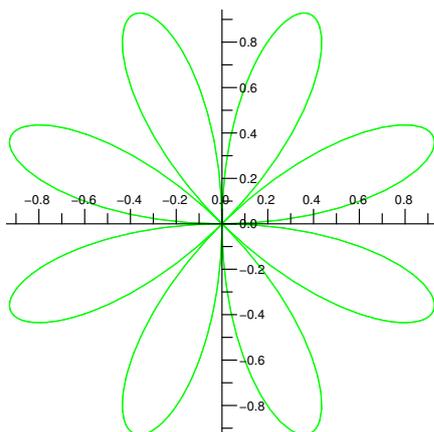
En pratique, toujours faire un croquis au brouillon pour ne pas se tromper : par exemple ici on suppose que

$$(\theta \mapsto -\theta) \leftrightarrow (\rho \mapsto -\rho)$$

et le dessin montre bien que l'on doit faire une symétrie d'axe (Oy) .



EXEMPLE 291 — Étudions $\rho = \sin 4t$ dont on a donné le tracé en introduction :



$(\theta \mapsto \theta + \frac{\pi}{2}) \leftrightarrow (\rho \mapsto \rho)$, alors étude sur I de longueur $\frac{\pi}{2}$, puis faire 3 rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$;
 $(\theta \mapsto -\theta) \leftrightarrow (\rho \mapsto -\rho)$, alors étude sur $[0; \frac{\pi}{4}]$ puis symétrie d'axe $(0, y)$.
 Avant de tracer effectivement la courbe, il reste encore quelques étapes.

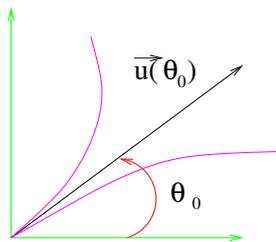
§ 2. Étude à l'origine

On suppose ici que pour une valeur θ_0 du paramètre θ , on a $\rho = 0$.

L'expression $\overrightarrow{OM}(\theta) = \rho(\theta) \vec{u}(\theta)$, montre que

$$\vec{u}(\theta) = \pm \frac{\overrightarrow{M(\theta_0)M(\theta)}}{\|M(\theta_0)M(\theta)\|} \text{ et donc } \vec{u}(\theta_0) \text{ est un}$$

vecteur directeur de la tangente en l'origine.



§ 3. Étude locale en un point différent de l'origine

PROPOSITION 292

Tout point de l'arc Γ autre que l'origine est régulier et admet pour tangente la droite passant par $M(\theta)$ et de vecteur directeur $\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}$.

Preuve — On a $\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} = \rho'(\theta) \vec{u}(\theta) + \rho(\theta) \vec{v}(\theta)$ et ce vecteur est non nul pour tout θ . □

REMARQUE 293 — La preuve montre que le vecteur tangent à la courbe en θ_0 s'écrit facilement dans la base $(\vec{u}(\theta_0), \vec{v}(\theta_0))$, et on pourra souvent s'en contenter. Pour obtenir les coordonnées cartésiennes, il suffit de remplacer $\vec{u}(\theta)$ et $\vec{v}(\theta)$ par leurs expressions en fonctions de \vec{i} et \vec{j} :

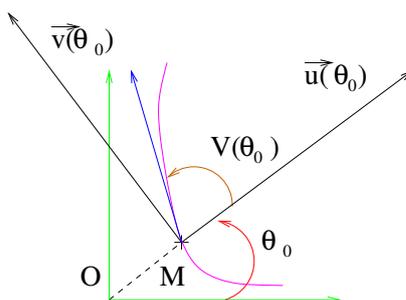
$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} = (\rho'(\theta) \cos \theta - \rho(\theta) \sin \theta) \vec{i} + (\rho'(\theta) \sin \theta + \rho(\theta) \cos \theta) \vec{j}.$$

PROPOSITION 294

Soit $M(\theta_0)$ un point distinct de l'origine, \mathcal{T} la tangente à la courbe en $M(\theta_0)$ et $V(\theta_0)$ l'angle orienté des droites (OM) et \mathcal{T} .

1. Si $\rho'(\theta_0) \neq 0$, alors $\tan V(\theta_0) = \frac{\rho(\theta_0)}{\rho'(\theta_0)}$.
2. Si $\rho'(\theta_0) = 0$, alors $V(\theta_0) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$.

Preuve — On écrit encore $\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} = \rho'(\theta) \vec{u}(\theta) + \rho(\theta) \vec{v}(\theta)$, un dessin permet de comprendre :



□

REMARQUE 295 — L'angle $V(\theta_0)$ est l'angle entre $(O, \vec{u}(\theta_0))$ et la tangente, pour obtenir l'angle entre (O, \vec{i}) et la tangente, il faut encore ajouter θ_0 .

EXEMPLE 296 — Soit l'arc paramétré en polaire défini par $\rho(\theta) = \sqrt{\cos 2\theta}$:

ρ est définie sur $[-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi]$. On réduit le domaine d'étude :

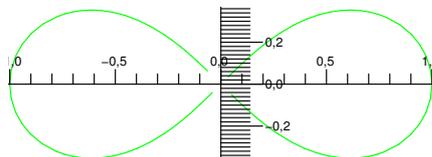
1. ρ est 2π -périodique, donc étudie sur $[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}]$ (on choisit un "intervalle" d'étude de longueur 2π) ;

2. ρ est π -périodique, donc étude sur $[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$ puis rotation d'angle π (donc symétrie centrale) pour une étude sur $[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}]$.

3. $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$, donc étude sur $[0; \frac{\pi}{4}]$ puis symétrie d'axe (Ox).

On calcule $\rho' = \frac{-\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$ et donc ρ strictement décroissante sur $[0; \frac{\pi}{4}]$:

x	0	$\frac{\pi}{4}$
ρ'		-
ρ	1	↘ 0



Il y a un point passant par l'origine, et alors $\theta = \frac{\pi}{4}$, donc une tangente d'équation $y = x$.

Pour $\theta = 0$ et $M(0) = (1, 0)$, $\rho'(0) = 0$ donc le vecteur tangent est $\rho(0) \vec{u}(\theta)$, c'est-à-dire une tangente verticale.

Et si $\theta \neq 0$, l'angle $V(\theta)$ est donné par $\tan V(\theta) = \frac{\rho}{\rho'} = -\frac{1}{\tan 2\theta} = \tan(2\theta + \frac{\pi}{2})$, qui permet de trouver $V(\theta)$.

§ 4. Étude des branches infinies

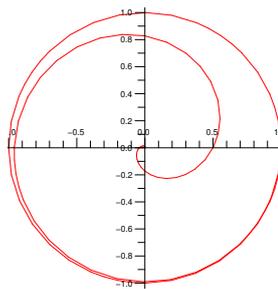
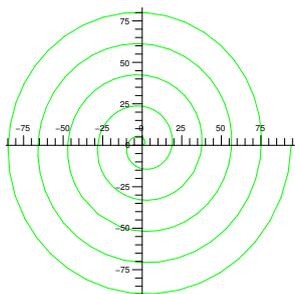
DÉFINITION 297

Lorsqu'un arc paramétré admet une représentation polaire $f(\theta) = \rho(\theta) \vec{u}(\theta)$ avec $\lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} \rho(\theta) = \pm\infty$, on dit que l'arc présente une branche spirale.

DÉFINITION 298

Avec les mêmes notations, si $\lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} \rho(\theta) = b \in \mathbb{R}^*$, on dit que l'arc admet un cercle asymptote (de rayon b) et si $b = 0$ on dit que l'arc admet un point asymptote.

EXEMPLE 299 — La courbe $\rho = 3\theta$ admet une spirale et $\rho = \frac{e^\theta}{1 + e^\theta}$ un cercle et un point asymptote.



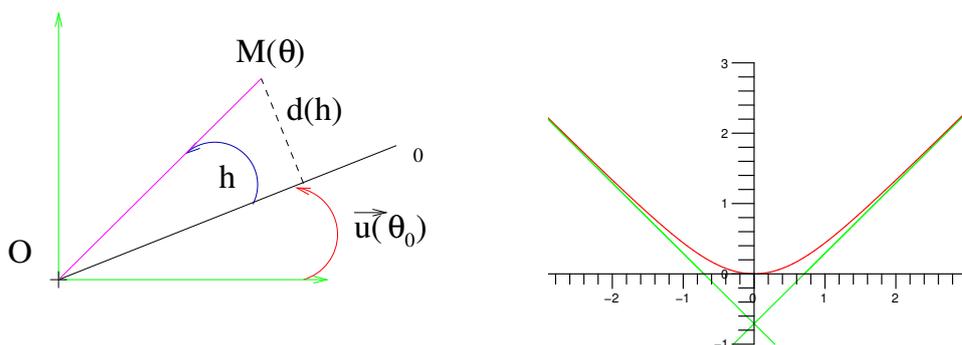
PROPOSITION 300

Lorsqu'il existe θ_0 tel que $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \rho(\theta) = \pm\infty$, la courbe admet une branche infinie dans la direction $\vec{u}(\theta_0)$.

On pose $h = \theta - \theta_0$, et $d(h) = \rho(\theta_0 + h) \sin h$.

1. Si $\lim_{h \rightarrow 0} \rho(\theta_0 + h) \sin h = p$, alors la droite $-\sin \theta_0 x + \cos \theta_0 y = p$ est asymptote à la courbe et la position de l'asymptote par rapport à la courbe se déduit des variations de $\rho(\theta) \sin(\theta - \theta_0)$.
2. Si $\lim_{h \rightarrow 0} \rho(\theta_0 + h) \sin h = \pm\infty$, alors l'arc présente une branche parabolique d'axe $\vec{u}(\theta_0)$.

Preuve — En effet la distance du point $M(\theta)$ à la droite dirigée par $\vec{u}(\theta_0)$ et passant par l'origine est donnée par $d(h) = \rho(\theta_0 + h) \sin h$:



Si on se place dans le repère $(0, \vec{u}(\theta_0), \vec{v}(\theta_0))$ déduit du repère d'origine par une rotation d'angle θ_0 , alors $X = \rho(\theta) \cos(\theta - \theta_0)$ et $Y = \rho(\theta) \sin(\theta - \theta_0)$. On a $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \frac{Y}{X} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{\cos h} = 0$. La courbe admet une direction asymptotique de vecteur $\vec{u}(\theta_0)$.

De plus, si $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} Y = p$, alors on a une asymptote oblique de direction $\vec{u}(\theta_0)$ et qui passe par le point $X = 0, Y = p$, c'est-à-dire par le point $(-p \sin \theta_0, p \cos \theta_0)$. L'équation de l'asymptote est donc $-\sin \theta_0 x + \cos \theta_0 y = p$.

Si $\lim_{h \rightarrow 0} \rho(\theta_0 + h) \sin h = \pm \infty$, alors l'arc présente une branche parabolique d'axe $\vec{u}(\theta_0)$. \square

EXEMPLE 301 — La courbe \mathcal{C} définie par $\rho = \tan(2\theta)$ vérifie ρ $\pi/2$ -périodique et impaire donc étudie sur $[0; \frac{\pi}{4}]$. La courbe admet une branche infinie en $\frac{\pi}{4}$, et dans le repère $(0, \vec{u}(\frac{\pi}{4}), \vec{v}(\frac{\pi}{4}))$, on calcule la seconde coordonnée :

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) \tan 2\theta = \lim_{h \rightarrow 0} \sin h \tan 2(h + \frac{\pi}{4}) = \lim_{h \rightarrow 0} \sin h \frac{\cos 2h}{-\sin 2h} = -\frac{1}{2}.$$

d'où une asymptote d'équation $y = x - \frac{\sqrt{2}}{2}$ et en $\frac{\pi}{4}^-$ l'asymptote est en-dessous de la courbe car dans le calcul ci-dessus on a au voisinage de 0

$$\sin h \times \frac{\cos 2h}{-\sin 2h} = -\frac{\cos 2h}{2 \cos h} > -\frac{1}{2}.$$

Par symétrie d'axe (Oy) on en déduit de même une asymptote en $-\frac{\pi}{4}^+$ d'équation $y = -x - \frac{\sqrt{2}}{2}$ et la courbe est au-dessus de l'asymptote.

Étude en polaire : on procède donc suivant les étapes

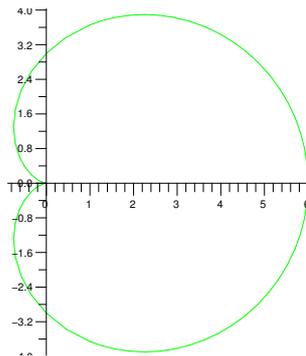
1. Réduction du domaine d'étude ;
2. Variations de ρ ;
3. Points passant par l'origine ;
4. Étude branches infinies ;
5. Placement des points remarquables, tangentes, asymptotes ;
6. Tracer la courbe.

EXEMPLE 302 — La cardioïde : $\Gamma : \rho = a(1 + \cos \theta)$ avec $a > 0$.

1/ Réduction : ρ est 2π -périodique et paire, donc étudie sur $[0; \pi]$ puis symétrie d'axe (Ox) et on retrouve le support Γ en entier.

2/ $\rho' = -a \sin \theta$

θ	0		π
ρ'	0	—	0
ρ	$2a$	\searrow	0



En π , $\rho = 0$, on a donc une tangente horizontale.

On n'a pas de branches infinies et en $\theta = 0$, $\rho'(0) = 0$, on a donc une tangente verticale en $(2a, 0)$.

Pour étudier, les autres tangentes verticales ou horizontales, on calcule l'angle $V(\theta)$ pour $\theta \in]0, \pi[$:

$$\tan V(\theta) = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{1 + \cos \theta}{-\sin \theta} = -\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = \tan((\pi + \theta)/2),$$

d'où $V(\theta) = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$. L'angle entre $(0x)$ et la tangente en $M(\theta)$ vaut $\theta + V(\theta) = \frac{\pi}{2} + \frac{3\theta}{2}$.

On a une tangente horizontale si $\theta + V(\theta) = \pi$ ou 2π car $\theta \in [0, \pi]$ et donc pour $\theta = \pi$ (déjà vu) ou $\theta = \frac{\pi}{3}$.

On a une tangente verticale si $\theta + V(\theta) = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$ car $\theta \in [0, \pi]$ et donc pour $\theta = 0$ (déjà vu) ou $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

4.5.3 Points d'inflexion

Le plan \mathcal{P} est muni d'un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$. Soit Γ une courbe de représentation polaire $\rho = \rho(\theta)$ où ρ est de classe \mathcal{C}^2 . On rappelle que

$$\vec{u} = \vec{u}(\theta) = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \vec{v}(\theta) = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j},$$

et alors on a

$$\frac{d\vec{M}}{d\theta} = \rho' \vec{u} + \rho \vec{v} \quad \text{et} \quad \frac{d^2\vec{M}}{d\theta^2} = (\rho'' - \rho) \vec{u} + 2\rho' \vec{v}.$$

On a vu que si M est un point d'inflexion alors $\frac{d\vec{M}}{d\theta}$ et $\frac{d^2\vec{M}}{d\theta^2}$ sont liés, c'est-à-dire

$$\det_{(\vec{u}, \vec{v})} \left(\frac{d\vec{M}}{d\theta}, \frac{d^2\vec{M}}{d\theta^2} \right) = \begin{vmatrix} \rho' & \rho'' - \rho \\ \rho & 2\rho' \end{vmatrix} = \rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = 0.$$

De plus, rappelons que pour une courbe en polaire le vecteur $\frac{d\vec{M}}{d\theta}$ n'est jamais nul en dehors de l'origine, donc on ne peut avoir un point de rebroussement de seconde espèce.

On en déduit la proposition suivante

PROPOSITION 303

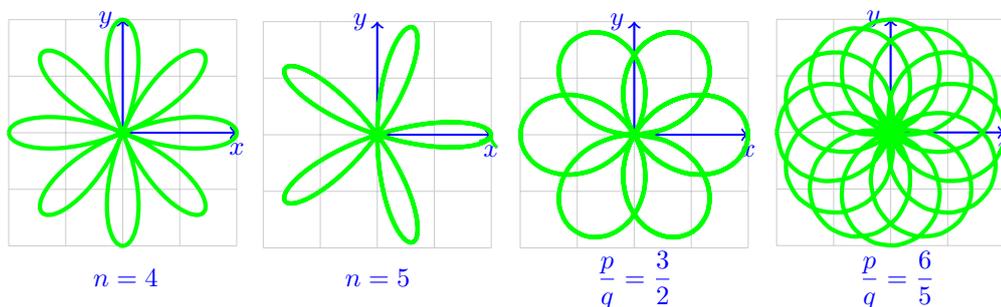
Si un arc est de classe \mathcal{C}^2 au voisinage de t_0 tel que $M(t_0)$ n'est pas l'origine, alors $M(t_0)$ est un point d'inflexion si et seulement si $\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''$ s'annule et change de signe.

EXEMPLE 304 — La courbe $\rho = \sin 4t$ n'a pas de points d'inflexion car

$$\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = \sin^2 4t + 32 \cos^2 4t + 16 \sin^2 4t = 15 \cos^2 4t + 17$$

ne s'annule jamais. On a bien une fleur !

EXERCICE 305 — Étudier la courbe de la forme $\rho = \sin nt$. C'est encore une fleur, combien y-a-t-il de pétales ? Et si $\rho = \sin \frac{p}{q}t$, regardez sur des exemples.



REMARQUE 306 — En posant $u = \frac{1}{\rho}$, alors $u' = -\frac{\rho'}{\rho^2}$ et $u'' = \frac{-\rho\rho'' + 2\rho'^2}{\rho^3}$, on a

$$u + u'' = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^3},$$

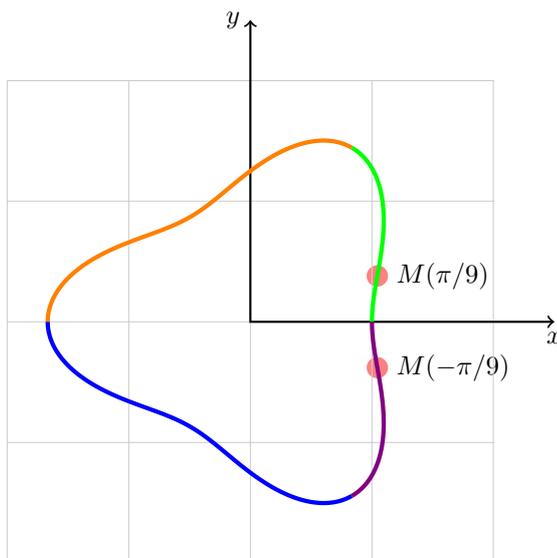
et il suffit d'étudier le signe de $u + u''$, ce qui peut simplifier les calculs.

EXEMPLE 307 — Déterminer les points d'inflexion de la courbe Γ d'équation polaire $\rho = \frac{1}{4 + \cos 3\theta}$.

La fonction est $\frac{2\pi}{3}$ -périodique et pair, donc on fait une étude sur $[0; \frac{\pi}{3}]$ puis une symétrie d'axe $(0, \vec{i})$ et 2 rotations d'angles $\frac{2\pi}{3}$.

On pose $u = \frac{1}{\rho}$ et $u = 4 + \cos 3\theta$, d'où $u'' = -9 \cos \theta$ et $u + u'' = 4 - 8 \cos 3\theta$, qui s'annule et change de signe sur $[0; \frac{\pi}{3}]$ si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{9}$.

On en déduit que Γ admet 6 points d'inflexions : la symétrie axiale en donne un second et les deux rotations en donnent 6.



4.6 PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES

Il s'agit ici de calculer la longueur d'arcs dans le plan ou l'espace : ce sont en fait des problèmes à une variable.

DÉFINITION 308

Soit $I = [t_1; t_2]$ un intervalle de \mathbb{R} avec $t_1 < t_2$ et $\Gamma = (I, f)$ un arc de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 . On appelle longueur de l'arc Γ le réel positif

$$l = L(\Gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \|f'(t)\| dt.$$

EXEMPLE 309 —

1. Le segment $[A; B]$, avec $A(a_1, a_2, a_3)$ et $B(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ s'écrit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto tA + (1-t)B$ et $f'(t) = \overrightarrow{BA}$. On obtient

$$L([A; B]) = \int_0^1 \|\overrightarrow{AB}\| dt = \|\overrightarrow{AB}\|$$

ce qui est fort rassurant.

2. Soit $I = [0; 2\pi]$ et $f : t \mapsto (r \cos t, r \sin t)$, $r > 0$. On calcule le périmètre du cercle :

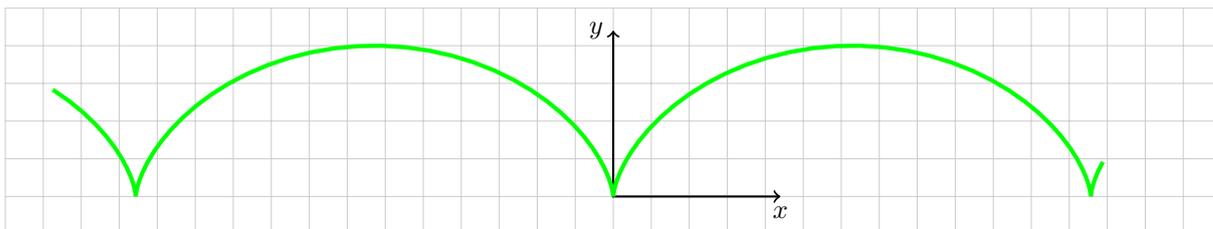
$$\int_0^{2\pi} \|(r \cos t, r \sin t)'\| dt = r \int_0^{2\pi} dt = 2\pi r.$$

REMARQUE 310 — On calcule ainsi la longueur d'un arc

1. Si $y = f(x)$, pour $x \in [t_1; t_2]$, alors $L(\Gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$
2. Si l'arc est paramétré par $(x(t), y(t))$, alors $L(\Gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$.
3. Si l'arc est donné en polaire, alors $L(\Gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} dt$.

EXEMPLE 311 — Soit la cycloïde \mathcal{C} paramétrée par $\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t) \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases}$ avec $t \in [0; 2\pi]$ et $a > 0$. On pose $f(t) = (x(t), y(t))$, et on calcule la longueur d'une arche :

$$\begin{aligned} L(\mathcal{C}) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt \\ &= a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - (1 - 2\sin^2 \frac{t}{2})} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 8a. \end{aligned}$$



Chapitre 5 Coniques

On étudie ici les coniques (ellipses, paraboles, hyperboles). Le but de ce cours est que vous soyez capables de reconnaître l'équation d'une conique en cartésiennes et en polaires (nature, excentricité, axes, foyers...).

5.1 DÉFINITIONS GÉOMÉTRIQUES

On peut définir une conique soit à partir d'un foyer, le repère est alors centré en ce point et on utilisera de préférence les coordonnées polaires, soit à partir de ses deux foyers, le repère est le plus souvent placé au milieu de ce deux points et on utilisera plutôt les coordonnées cartésiennes.

5.1.1 Définition monofocale et représentation polaire

§ 1. Définitions

DÉFINITION 312

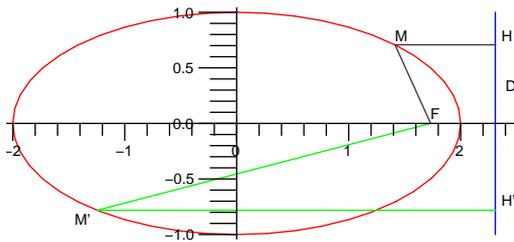
Soit $e \in \mathbb{R}_+^*$, \mathcal{D} une droite du plan euclidien et F un point non situé sur \mathcal{D} . L'ensemble des points M du plan tels que $d(M, F) = e \cdot d(M, \mathcal{D})$ s'appelle conique de foyer F , d'excentricité e et de directrice \mathcal{D} .

De plus, on dit que

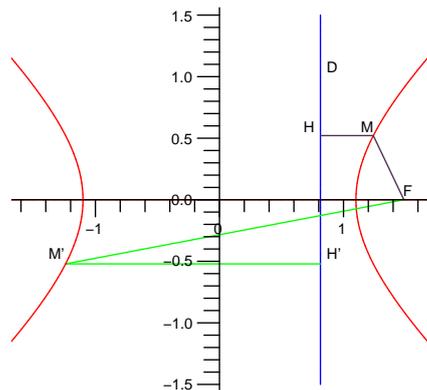
1. la conique est une ellipse, si $0 < e < 1$;
2. la conique est une parabole, si $e = 1$;
3. la conique est une hyperbole si $e > 1$.

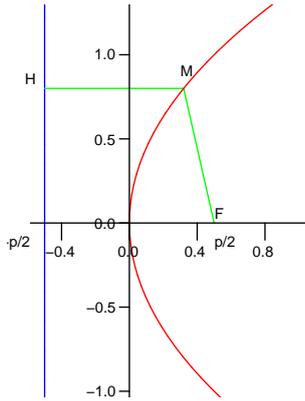
Illustration

Si $e = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$, on obtient une ellipse.



Si $e = \frac{\sqrt{2.21}}{1.1} > 1$, on obtient une hyperbole.





Si $e = 1$, on obtient une parabole.

REMARQUE 313 — On remarque que

1. la droite (Ox) perpendiculaire à \mathcal{D} et passant par F est un axe de symétrie de la conique.
2. la droite (Oy) est aussi une symétrie pour l'ellipse et l'hyperbole ; l'image F' de F par cette symétrie est aussi un foyer.
3. Par contre, la parabole n'a qu'un seul foyer.

§ 2. Représentation polaire

Dans cette partie le repère $\mathcal{R}_1 = (F, \vec{i}, \vec{j})$ est centré en F et de sorte que la directrice \mathcal{D} de la conique est dirigée par le vecteur \vec{j} ; l'équation de \mathcal{D} dans \mathcal{R}_1 est $x = d = d(F, \mathcal{D})$. Les coniques s'expriment facilement dans ce repère en coordonnées polaires.

PROPOSITION 314

L'équation polaire de la conique $\Gamma(e, F, \mathcal{D})$ dans \mathcal{R}_1 est

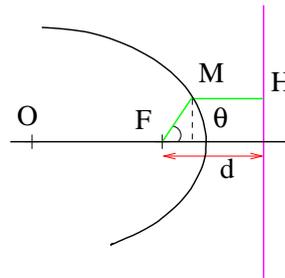
$$\rho = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}.$$

Preuve —

Soit H le projeté orthogonal de M sur \mathcal{D} , alors $FM = |\rho|$ et $\overrightarrow{MH} = (d - \rho \cos \theta) \vec{i}$, donc $MH = |d - \rho \cos \theta|$. On en déduit que $M \in \Gamma$ si et seulement si $\rho = \pm e(d - \rho \cos \theta)$. Et donc :

$$\rho = \frac{ed}{1 + e \cos \theta} \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{-ed}{1 - e \cos \theta}.$$

Mais, $\rho(\theta + \pi)$ du second cas vaut $-\rho(\theta)$ du premier, donc ces deux représentations coïncident et on ne retient que la première.



□

REMARQUE 315 — Si on applique une rotation de centre F et d'angle φ , alors l'équation de la conique devient

$$\rho = \frac{ed}{1 + e \cos(\theta - \varphi)},$$

et la directrice a pour équation $\mathcal{D} : \rho = \frac{d}{\cos(\theta - \varphi)}$ (c'est la droite telle que $\rho(0) = \frac{d}{\cos \varphi}$ et $\rho(\varphi) = d$).
En particulier pour reconnaître une courbe d'équation polaire

$$\rho = \frac{p}{1 + \alpha \cos \theta + \beta \sin \theta}$$

il suffit décrire $\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta$ sous la forme $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos(\theta - \varphi)$; c'est une conique dont un foyer est à l'origine, dont l'excentricité est $e = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ et dont l'axe fait un angle φ avec le vecteur \vec{i} .

DÉFINITION 316

Le réel $p = ed$ s'appelle paramètre de la conique Γ .

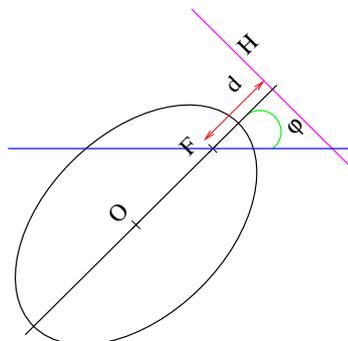
EXEMPLE 317 —

Soit la courbe d'équation polaire dans \mathcal{R}_1 ,

$$\rho = \frac{\frac{4}{3}}{1 + \frac{\sqrt{5}}{3} \cos(\theta - \frac{\pi}{4})}.$$

C'est une conique d'excentricité $\frac{\sqrt{5}}{3}$, donc une ellipse, et $d = \frac{p}{e} = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

L'axe de la conique fait un angle $\frac{\pi}{4}$ avec le vecteur \vec{i} .



REMARQUE 318 — Pour trouver la longueur des axes de l'ellipse ou les asymptotes d'une hyperbole on va obtenir des formules dans la partie suivante sur la définition bifocale. Mais avant on termine l'étude des paraboles.

5.1.2 Les paraboles

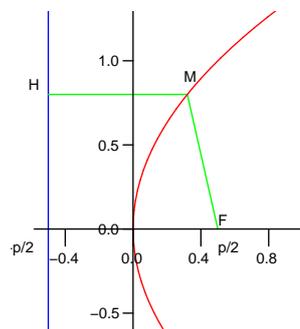
Ici on suppose donc que $e = 1$. Et donnons de suite un exemple de parabole :

Soit Γ , la parabole de foyer F , origine du repère $\mathcal{R}_1 = (F, \vec{i}, \vec{j})$ et de directrice $\mathcal{D} : x = -d = -p$ (ici $e = 1$), où $d = d(F, \mathcal{D})$.

La parabole est l'ensemble des points M tels que $MF = MH$.

Géométriquement, on choisit H sur \mathcal{D} et M est à l'intersection de la médiatrice de $[HF]$ et de la droite horizontale passant par H .

Enfin, remarquez que dans ce cas, la branche est unique, il n'y a qu'un foyer.


PROPOSITION 319

(Équation réduite) Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ le repère de centre $O(-\frac{p}{2}, 0)$. Alors Γ admet pour équation cartésienne (E) : $Y^2 = 2pX$.

Preuve — En effet, dans le repère \mathcal{R}_1 , $M(x, y) \in \Gamma$ si et seulement si :

$$MF^2 = d(M, \mathcal{D})^2 \iff x^2 + y^2 = (x - (-d))^2 \iff y^2 = 2dx + d^2 \iff y^2 = 2d(x + \frac{d}{2}).$$

Si $M(X, Y)$ dans \mathcal{R} , alors $X = x + \frac{d}{2}$ et $Y = y$, donc $Y^2 = 2dX = 2pX$. □

PROPOSITION 320

(Représentation paramétrique) La parabole d'équation $y^2 = 2px$ admet une représentation paramétrique :

$$\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P} \\ t \mapsto (p\frac{t^2}{2}, pt) \end{cases}$$

REMARQUE 321 — Les avantages de la représentation paramétrique sont nombreux : en particulier, on a vu dans le chapitre précédent que l'on trouvait alors facilement le vecteur directeur de la tangente en un point M : $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial t}$. On en déduit facilement la proposition suivante :

PROPOSITION 322

Tout point $M(t)$ de Γ est régulier et la tangente à la parabole en M a pour équation $x - ty + p\frac{t^2}{2} = 0$ et c'est la médiatrice de FH , où H est le projeté orthogonal de M sur \mathcal{D} .

Preuve — La paramétrisation assure que $\vec{v}(t, 1)$ est un vecteur directeur de la tangente en $M(p\frac{t^2}{2}, pt)$. Le point H a pour coordonnées $(-\frac{p}{2}, pt)$ et $F(\frac{p}{2}, 0)$; on en déduit l'équation cartésienne de la tangente.

Enfin, on vérifie que $\vec{v} \cdot \vec{FH} = 0$, et comme $MH = MF$, la tangente est bien la médiatrice de $[HF]$. □

REMARQUE 323 — On vient de montrer qu'un rayon de direction (Ox) intérieur à la parabole se réfléchit en convergeant vers le foyer.

5.1.3 Définition bifocale et équation cartésienne

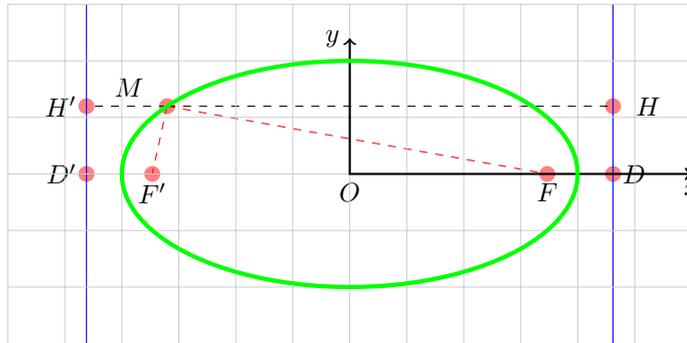
On s'intéresse ici au cas $e \neq 1$, c'est-à-dire aux ellipses et aux hyperboles. On montre que l'on peut alors identifier une conique en fixant deux points (les foyers) et une longueur :

PROPOSITION 324

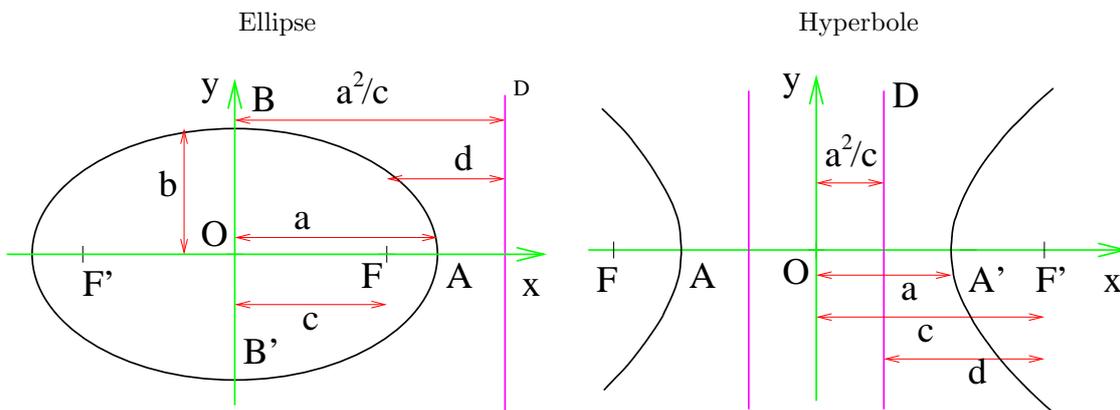
Soient F et F' deux points distincts du plan \mathcal{P} et $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. L'ensemble $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{P} \mid MF + MF' = 2a\}$ est une ellipse de foyers F et F' si $a > \frac{1}{2}FF'$ (vide sinon).
2. L'ensemble $\mathcal{H} = \{M \in \mathcal{P} \mid |MF - MF'| = 2a\}$ est une hyperbole de foyers F et F' si $a < \frac{1}{2}FF'$ (vide sinon).

REMARQUE 325 — Les démonstrations de ces résultats ne posent pas de problèmes si l'on choisit le bon repère et les bonnes notations. On remarquera juste ici que dans le cas de l'ellipse, avec les notations ci-dessous, on a $MF = eMH$ et $MF' = eMH'$ et donc $MF + MF' = e(MH + MH') = eDD' = 2eOD = 2a$. Ce qui montre que $MF + MF'$ est bien constante.



L'équation réduite de ces coniques s'en déduit sans problème.



On a

$$\begin{aligned} 0 < b < a, \\ a^2 &= b^2 + c^2, \\ e &= \frac{c}{a} \text{ et } d = \frac{a^2 - c^2}{c} = \frac{b^2}{c}. \end{aligned}$$

Équation réduite :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Grand axe : $AA' = 2a$

Petit axe : $BB' = 2b$

Sommets : A, A', B et B'

Preuve — Dans le cas de l'ellipse, on utilise que $BF + BF' = 2a$, donc $BF = a$ et $AF + AF' = 2OA = 2a$, donc $OA = a$. La relation de pythagore donne $a^2 = b^2 + c^2$. Enfin, $FA = ed(A, D)$ implique $a - c = e(d(O, D) - a)$. Mais $a = BF = ed(O, D)$, donc $d(O, D) = \frac{a}{e}$. On en déduit $a - c = e(\frac{a}{e} - a)$ et $e = \frac{a}{c}$. La suite est facile. Et pour l'hyperbole, on procède de même. \square

REMARQUE 326 — Utiliser ces formules pour retrouver a, b et c quand la conique est donnée par l'équation polaire $\rho = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$, ce qui permet de compléter rapidement le tracé des coniques en polaire :

1. pour une ellipse, on a

$$2a = \rho(0) + \rho(\pi) = \frac{p}{1 + e} + \frac{p}{1 - e} = \frac{2p}{1 - e^2},$$

d'où a puis $c = ae$ et $b = \sqrt{a^2 - c^2}$:

$$a = \frac{p}{1 - e^2}, \quad c = \frac{pe}{1 - e^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

2. pour une hyperbole :

$$2a = -\rho(\pi) - \rho(0) = -\frac{p}{1 + e} - \frac{p}{1 - e} = \frac{2p}{e^2 - 1},$$

et alors

$$a = \frac{p}{e^2 - 1}, \quad c = \frac{pe}{e^2 - 1}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}}.$$

5.2 REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES ET TANGENTES

5.2.1 L'ellipse

PROPOSITION 327

L'ellipse \mathcal{E} d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P} \\ t \mapsto (a \cos t, b \sin t) \end{cases}$.

Conséquences :

1. L'ellipse est un arc régulier.
2. L'ellipse \mathcal{E} est en fait l'image du cercle \mathcal{C} d'équation $x^2 + y^2 = a^2$ par une affinité orthogonale de rapport $\frac{b}{a} : (x, y) \mapsto (x, \frac{b}{a}y)$.

PROPOSITION 328

(Équation de la tangente) La tangente à l'ellipse \mathcal{E} en

$M(t) = (a \cos t, b \sin t) = (x_0, y_0)$ a pour équation $bx \cos t + ay \sin t = ab$, ou encore

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Preuve — On utilise bien sûr la représentation paramétrique précédente qui donne le vecteur directeur de la tangente : $\vec{u}(-a \sin t, b \cos t)$ et on conclut sans problème. \square

PROPOSITION 329

La tangente à l'ellipse \mathcal{E} en M est la bissectrice extérieure de l'angle $(F'MF)$.

Preuve — On sait que $\|\overrightarrow{F'M}\| + \|\overrightarrow{FM}\| = 2a$. Donc, si l'on dérive les deux côtés de cette égalité, on obtient

$$\frac{\partial\|\overrightarrow{F'M}\|}{\partial t} + \frac{\partial\|\overrightarrow{FM}\|}{\partial t} = 0.$$

Or, si f est une fonction vectorielle de classe \mathcal{C}^1 , on sait que $\frac{\partial\|f(t)\|^2}{\partial t} = \frac{\partial(f(t)|f(t))}{\partial t} = 2(f'(t)|f(t))$ et donc

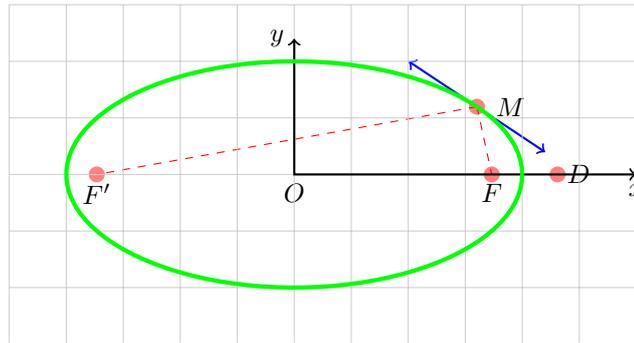
$$\frac{\partial\|f(t)\|}{\partial t} = \frac{(f'(t)|f(t))}{\|f(t)\|}.$$

En notant \vec{v} le vecteur $\frac{\partial f(t)}{\partial t}$, on obtient

$$(\vec{v} | \frac{\overrightarrow{F'M}}{\|\overrightarrow{F'M}\|} + \frac{\overrightarrow{FM}}{\|\overrightarrow{FM}\|}) = 0,$$

ce qui montre que \vec{v} est orthogonale à la somme de deux vecteurs de norme 1 et donc dirige la bissectrice extérieure de l'angle $F'MF$ (faire un dessin). \square

REMARQUE 330 — Ceci montre que si l'on place une source lumineuse en un des foyers alors elle se refléchit sur l'autre foyer. Le tunnel du métro à une forme elliptique et si l'on est sur l'un des deux quais, on entend parfaitement ce qui se passe sur l'autre quai !



REMARQUE 331 — Soit une ellipse \mathcal{E} de représentation paramétrique $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P} \\ t \mapsto (a \cos t, b \sin t) \end{cases}$ On peut essayer de calculer la longueur de l'ellipse :

$$L(\mathcal{E}) = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 t} dt = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} dt$$

La formule est une intégrale elliptique du second ordre. En bref, elle est transcendante et n'a pas de solution analytique.

On a des valeurs approchées : $L(\mathcal{E}) \approx 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ qui rappelle la formule du périmètre du cercle. Il existe une formule bien meilleure due à Ramanujan :

$$L(\mathcal{E}) \approx \pi \left(3(a + b) - \sqrt{(3a + b)(a + 3b)} \right).$$

5.2.2 L'hyperbole

PROPOSITION 332

L'hyperbole \mathcal{H} d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P} \\ t \mapsto (\pm a \operatorname{ch} t, b \operatorname{sh} t) \end{cases}$.

Conséquences :

1. L'hyperbole est un arc régulier.

2. L'hyperbole \mathcal{H} admet pour asymptote les droites $y = \pm \frac{b}{a}x$.

PROPOSITION 333

(Équation de la tangente) La tangente à l'hyperbole \mathcal{H} en

$M(t) = (a \operatorname{ch} t, b \operatorname{sh} t) = (x_0, y_0)$ a pour équation $bx \operatorname{ch} t - ay \operatorname{sh} t = ab$, ou encore

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

PROPOSITION 334

La tangente à \mathcal{H} en un point M est la bissectrice de l'angle $F'MF$.

Preuve — C'est la même preuve que dans le cas de l'ellipse (cf proposition 329) □

PROPOSITION 335

(Équation cartésienne "usuelle") Une partie du plan \mathcal{P} est une hyperbole si et seulement il existe un repère (non nécessairement orthonormé!) dans lequel l'équation cartésienne de Γ est $xy = 1$.

Preuve —

1. L'équation réduite d'une hyperbole est $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ et donc

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 1,$$

et on choisit \vec{i}' et \vec{j}' tels que $X = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ et $Y = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$:

$$\begin{cases} \vec{i} = \frac{\vec{i}'}{2} + \frac{\vec{j}'}{2} \\ \vec{j} = \frac{\vec{i}'}{2} - \frac{\vec{j}'}{2} \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} \vec{i}' = \frac{a}{2}\vec{i} + \frac{b}{2}\vec{j} \\ \vec{j}' = \frac{a}{2}\vec{i} - \frac{b}{2}\vec{j} \end{cases}.$$

Dans le repère $(0, \vec{i}', \vec{j}')$ l'équation de l'hyperbole devient $XY = 1$.

2. Réciproquement : Si Γ a pour équation $XY = 1$ dans un repère (A, \vec{u}, \vec{v}) , alors en posant $\begin{cases} \vec{u}' = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \\ \vec{v}' = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \end{cases}$, l'équation devient dans (A, \vec{u}', \vec{v}') de la forme $XY = \lambda$ (avec $\lambda = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$).

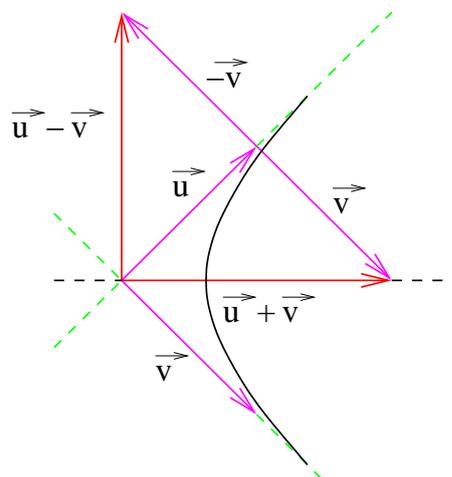
Les vecteurs \vec{u}' et \vec{v}' sont les directions des asymptotes.

On pose

$$\vec{i} = \frac{\vec{u}' + \vec{v}'}{\|\vec{u}' + \vec{v}'\|} \quad \text{et} \quad \vec{j} = \frac{\vec{u}' - \vec{v}'}{\|\vec{u}' - \vec{v}'\|}.$$

On a $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ et alors l'équation dans (A, \vec{i}, \vec{j}) devient

$$\frac{x^2}{\|\vec{u}' + \vec{v}'\|^2} - \frac{y^2}{\|\vec{u}' - \vec{v}'\|^2} = \lambda.$$



□

DÉFINITION 336

Une hyperbole dont les deux asymptotes sont orthogonales est dite équilatère.

5.3 RÉDUCTION DES CONIQUES

Ce thème sera entièrement traité en deuxième année en dimension quelconque : c'est une des grandes réussites de l'algèbre linéaire (diagonalisation des matrices symétriques réelles dans une base orthonormée). Nous montrons ici comment retrouver les éléments caractéristiques d'une conique donnée par une équation cartésienne.

5.3.1 Généralités

DÉFINITION 337

On appelle conique du plan euclidien \mathcal{P} toute courbe définie par une équation cartésienne

$$\Psi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

avec $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$, et $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$. De plus, le réel $\Delta = AC - B^2$ s'appelle discriminant de la conique.

EXEMPLE 338 — L'équation réduite des ellipses, paraboles et hyperboles montre que ce sont encore des coniques au sens ci-dessus. Un cercle est aussi une conique son équation étant de la forme $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$. Mais on a aussi des coniques plus surprenantes :

1. L'équation $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ montre que l'union de deux droites parallèles forme aussi une conique, voir une droite seule ($x = 0$).
2. L'équation $(ax - by + c)(a'x + b'y + c') = 0$ montre que l'union de deux droites sécantes forment aussi une conique.
3. L'ensemble vide est une conique car l'équation $x^2 = -1$.
4. Un point est un ensemble : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0$.

DÉFINITION 339

On appelle conique propre une conique au sens ci-dessus qui est une ellipse, un cercle, une parabole ou une hyperbole ; les autres sont appelées impropres (droites, points et ensemble vide).

EXEMPLE 340 —

1. La conique d'équation $x^2 + 2y^2 + 2x - 3y = 2$ a aussi pour équation $(x+1)^2 + 2(y - \frac{3}{4})^2 = 2 + 1 + \frac{9}{8} = \frac{33}{8}$ ou encore

$$\frac{(x+1)^2}{\frac{33}{8}} + \frac{(y - \frac{3}{4})^2}{\frac{33}{16}} = 1$$

et donc c'est une ellipse centrée en $(-1, \frac{3}{4})$.

2. L'équation $4x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0$ s'écrit $4x^2 - (y - 1)^2 = 0$ ou encore

$$(2x + y - 1)(2x - y + 1) = 0$$

qui représente l'union des deux droites d'équation $2x + y - 1 = 0$ et $2x - y + 1 = 0$.

3. L'équation $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6 = 0$ s'écrit $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 1 = 0$ et donc n'a pas de solution ; l'ensemble des solutions est l'ensemble vide.

5.3.2 Classification des coniques

§ 1. Les différents types de coniques

Voici tout de suite une règle simple qui permet une première caractérisation des coniques :

PROPOSITION 341

Soit une conique définie par une équation cartésienne

$$\Psi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

avec $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$, $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ et de discriminant $\Delta = AC - B^2$.

1. Si $\Delta > 0$, la conique est de type ellipse (c'est-à-dire l'ensemble vide, ou un point ou une ellipse ou un cercle)
2. Si $\Delta < 0$, la conique est de type hyperbole (c'est-à-dire la réunion de deux droites sécantes ou une hyperbole)

3. Si $\Delta = 0$, la conique est de type parabole (c'est-à-dire l'ensemble vide ou la réunion de deux droites parallèles ou une parabole).

EXEMPLE 342 —

1. $x^2 - 2xy + 2y^2 + 3x + y + 1 = 0$ est du type ellipse.
2. $x^2 - 4xy + y^2 + 8x - y + 7 = 0$ est du type hyperbole.
3. $2x^2 - 4xy + 2y^2 + x + 3y + 2 = 0$ est du type parabole.

REMARQUE 343 — Supposons que $B = 0$.

1. Si $\Delta = AC > 0$, alors A et C sont de même signe et l'équation devient :

$$A \left(x + \frac{D}{A} \right)^2 + C \left(y + \frac{E}{C} \right)^2 = -F + \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C}$$

et donc en changeant l'origine du repère (mais pas les axes) en $O'(-\frac{D}{A}, -\frac{E}{C})$ et en posant $R = -F + \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C}$, l'équation devient

$$AX^2 + CY^2 = R$$

qui est l'équation d'une ellipse, d'une hyperbole, d'un point ou de l'ensemble vide, puisque A et C sont de même signe.

2. De même, si $\Delta = AC < 0$, alors A et C sont de signes différents, par exemple $C = -C' < 0$ et

$$AX^2 - C'Y^2 = R$$

montre que l'on a l'équation d'une hyperbole si $R \neq 0$ et de deux droites sécantes sinon (prendre $\sqrt{AX} + \sqrt{C'Y} = 0$ et $\sqrt{AX} - \sqrt{C'Y} = 0$).

3. Si $\Delta = AC = 0$, on suppose par exemple $A \neq 0$, $C = 0$ (par hypothèse, A et C ne sont pas nuls en même temps, puisque l'on a déjà $B = 0$) et l'équation devient

$$A \left(x + \frac{D}{A} \right)^2 + 2Ey + F = \frac{D^2}{A},$$

qui est l'équation de deux droites parallèles ou du vide si $E = 0$, et l'équation d'une parabole sinon.

§ 2. Coniques à centre

Ensuite, notons que les ellipses et les hyperboles admettent un centre de symétrie tandis que la parabole n'en admet pas. On peut simplement retrouver le centre de symétrie d'une conique (si celui-ci existe!) :

PROPOSITION 344

Si $\Delta \neq 0$, alors le centre de la conique est solution du système

$$\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} = 0$$

EXEMPLE 345 —

1. L'équation $x^2 - 2xy + 2y^2 + 3x + y + 1 = 0$ donne le système $\begin{cases} 2x - 2y = -3 \\ 4y - 2x = -1 \end{cases}$ et le centre de la conique est $\Omega(-7/2, -2)$. On centre le repère en Ω et on pose $X = x + 7/2$ et $Y = y + 2$ et l'équation devient

$$\left(X - \frac{7}{2} \right)^2 - 2 \left(X - \frac{7}{2} \right) (Y - 2) + 2(Y - 2)^2 + 3 \left(X - \frac{7}{2} \right) + (Y - 2) + 1 = 0$$

$$\iff X^2 + 2Y^2 - 2XY - 21/4 = 0$$

2. L'équation $x^2 - 4xy + y^2 + 8x - y + 7 = 0$ donne le système $\begin{cases} 2x - 4y = -8 \\ 2y - 4x = 1 \end{cases}$ et le centre de la conique est $\Omega(1, 5/2)$. On centre le repère en Ω et on pose $X = x - 1$ et $Y = y - 5/2$ et l'équation devient

$$(X + 1)^2 - 4(X + 1)(Y + 5/2) + (Y + 5/2)^2 + 8(X + 1) - (Y + 5/2) + 7 = 0$$

$$X^2 - 4XY + Y^2 + 39/4 = 0$$

3. L'équation $2x^2 - 4xy + 2y^2 + x + 3y + 2 = 0$ donne le système $\begin{cases} 4x - 4y = -1 \\ 4y - 4x = -3 \end{cases}$ qui n'a pas de solutions !

REMARQUE 346 — On voit que l'équation de la conique dans le repère centré en son centre de symétrie permet de faire disparaître les termes en x et en y .
On va montrer que le terme en xy correspond à une rotation des axes mais avant cela traitons le cas de la parabole.

§ 3. Paraboles

Si le système de la proposition 344 n'a pas de solution ou si la solution n'est pas unique, ce n'est pas une conique à centre, mais alors $\Delta = 0$ et la conique est du type parabole.

Remarquons que dans ce cas A et C sont de même signe et donc on peut les supposer positifs. On vérifie alors que $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = (px + qy)^2$ où $p = \sqrt{A}$ et $q = \sqrt{B}$. On peut faire alors le changement de repère orthonormé (O, \vec{i}', \vec{j}') tel que $X = \frac{px + qy}{\sqrt{p^2 + q^2}}$ et $Y = \frac{-qx + py}{\sqrt{p^2 + q^2}}$:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}} \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}} \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

On obtient une équation de la forme

$$(p^2 + q^2)X^2 + D'X + E'Y + F = 0$$

et enfin, il suffit de poser $X_1 = X + \frac{D'}{2(p^2 + q^2)}$ et $Y_1 = Y + \frac{F}{E'} - \frac{D'^2}{4(p^2 + q^2)E'}$ si $E' \neq 0$. Pour obtenir une équation réduite de la conique : $(p^2 + q^2)X_1^2 + E'Y_1 = 0$.

Si $E' = D' = 0$, on a deux droites parallèle ($F < 0$) ou une droite ($F = 0$) ou le vide ($F > 0$).

Si $E' = 0$ et $D' \neq 0$, on obtient encore le vide ou deux droites parallèles ou une droite.

Ce qui termine l'étude des paraboles.

EXEMPLE 347 — L'équation $2x^2 - 4xy + 2y^2 + x + 3y + 2 = 0$ s'écrit

$$4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y\right)^2 + x + 3y + 2 = 0.$$

On pose $X = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y$ et $Y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y$ et donc $x = \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y$ et $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y$, et l'équation devient

$$4X^2 - \sqrt{2}X + 2\sqrt{2}Y + 2 = 0 \iff 4\left(X - \frac{\sqrt{2}}{8}\right)^2 + 2\sqrt{2}\left(Y + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{32}\right) = 0.$$

On en déduit que dans le repère $(\Omega, \vec{i}', \vec{j}')$, on a l'équation réduite d'une parabole

$$X'^2 = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{4}Y',$$

où les axes ont subi une rotation d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et Ω vaut pour $X = \frac{\sqrt{2}}{8}$ et $Y = -\frac{15\sqrt{2}}{32}$, donc $\Omega(x, y) = \left(-\frac{11}{32}, -\frac{19}{32}\right)$.

§ 4. Trouver les axes d'une ellipse ou d'une hyperbole

Nous supposons ici que l'équation est du type hyperbole ou ellipse et que l'on a trouvé le centre de symétrie, c'est-à-dire l'équation est du type

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F = 0.$$

On pose $x = \cos \theta X + \sin \theta Y$ et $y = -\sin \theta X + \cos \theta Y$, c'est-à-dire (X, Y) sont les coordonnées dans une rotation de centre O et d'angle $-\theta$ du repère d'origine. L'équation devient

$$(A \cos^2 \theta - B \sin 2\theta + C \sin^2 \theta)X^2 + (A \sin^2 \theta + B \sin 2\theta + C \cos^2 \theta)Y^2 + F = 0$$

si l'on choisit θ tel que le terme en XY s'annule :

$$[(A - C) \sin 2\theta + B \cos 2\theta] = 0,$$

ce qui est toujours possible puisque $\tan 2\theta$ est surjectif!

Il est normal que pour θ variant entre 0 et 2π , on trouve 4 valeurs possible, car les axes sont deux à deux orthogonaux.

EXEMPLE 348 — Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la conique \mathcal{C} d'équation dans $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$\Psi(x, y) = x^2 + xy + y^2 - x + 4y + 5 = 0.$$

On a $A = 1$, $B = \frac{1}{2}$ et $C = 1$, donc $\Delta = AC - B^2 = \frac{3}{4} > 0$ et \mathcal{C} est du type ellipse.

On cherche le centre de la conique :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + 2y + 4 = 0 \end{cases} \iff (x = 2, y = -3),$$

et le centre de la conique est $\Omega(2, -3)$. On pose $\mathcal{R}' = (O', \vec{i}', \vec{j}')$ et si (X, Y) sont les nouvelles coordonnées dans ce repère, on a $x = X + 2$ et $y = Y - 3$, d'où l'équation de \mathcal{C} dans \mathcal{R}

$$(X + 2)^2 + (X + 2)(Y - 3) + (Y - 3)^2 - (X + 2) + 4(Y - 3) + 5 = 0$$

qui se simplifie en

$$X^2 + XY + Y^2 - 2 = 0.$$

Les termes en X et Y ont disparu. Le terme en XY indique que l'on doit appliquer une rotation : ici on remarque que l'équation est symétrique en X et Y , donc la première bissectrice de \mathcal{R}' est un axe de symétrie. Soit r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$. On pose

$$\begin{cases} \vec{i}' = r(\vec{i}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j}) \\ \vec{j}' = r(\vec{j}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i} + \vec{j}) \end{cases}.$$

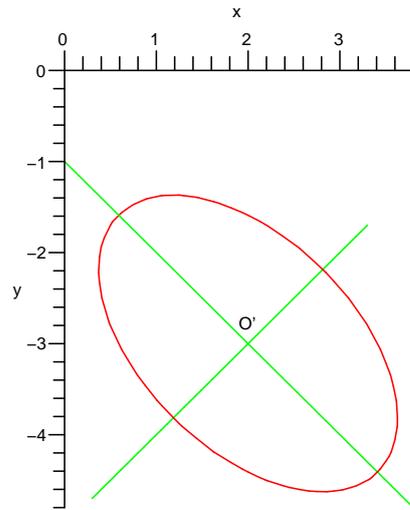
Si (u, v) sont les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}_1 = (\Omega, \vec{i}', \vec{j}')$, on a

$$\begin{cases} X = \frac{\sqrt{2}}{2}(u - v) \\ Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(u + v) \end{cases}$$

L'équation devient dans \mathcal{R}_1

$$\frac{1}{2}((u - v)^2 + (u - v)(u + v) + (u + v)^2) - 2 = 0 \iff 3u^2 + v^2 = 4 \iff \frac{u^2}{\frac{4}{3}} + \frac{v^2}{4} = 1$$

qui est donc l'équation d'une ellipse de grand axe dirigé par la seconde bissectrice puisque $\frac{4}{3} < 4$.



Chapitre 6 Fonctions de deux variables

6.1 MOTIVATIONS

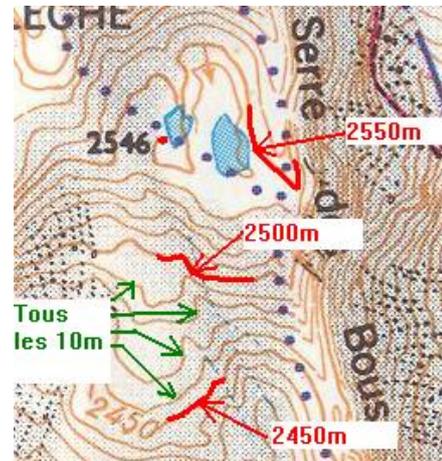
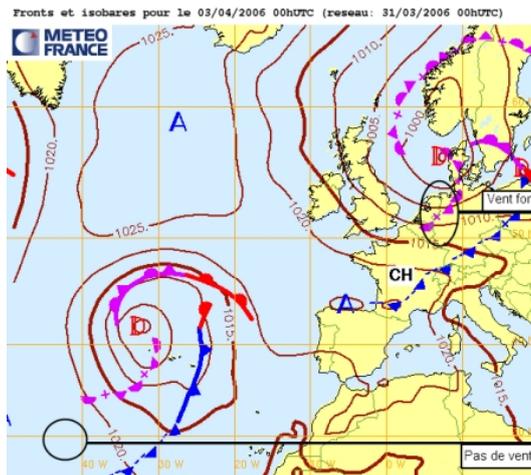
6.1.1 Étude de courbes

Nous venons de définir les coniques du plan $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ par l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que

$$\Psi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

On dit que $\Psi(x, y) = 0$ est une équation implicite de la courbe. Une autre manière de définir les coniques est de donner une paramétrisation.

Plus généralement, une fonction f de deux variables associe à chaque point (x, y) un nombre réel $f(x, y)$. Par exemple : si f mesure la température ou la pression, alors $f(x, y)$ sera la température ou la pression au point (x, y) .



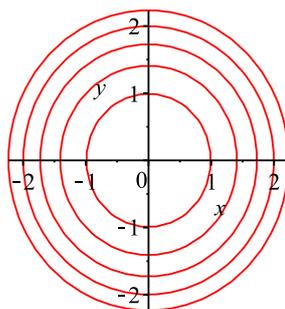
Courbes de niveaux : de la pression (à gauche) & de l'altitude (à droite)

DÉFINITION 349

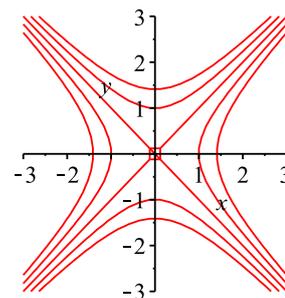
Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ une partie du plan et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ une fonction définie sur D . Pour chaque réel K , la **courbe de niveau** K de la fonction f est l'ensemble des points $(x, y) \in D$ tels que

$$f(x, y) = K.$$

EXEMPLE 350 —



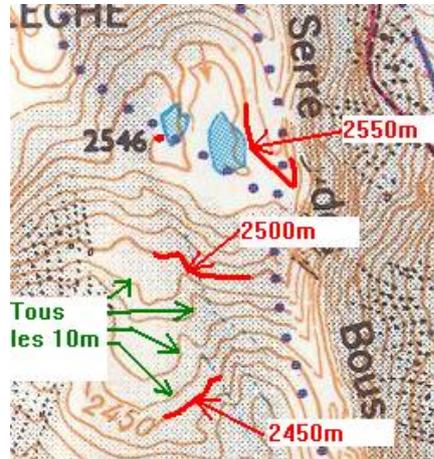
$$x^2 + y^2 = K \\ K \in [1, 5]$$



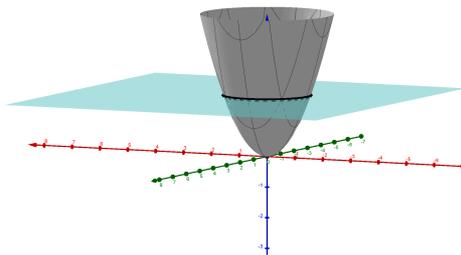
$$x^2 - y^2 = K \\ K \in [-2, +2]$$

6.1.2 Étude de surfaces

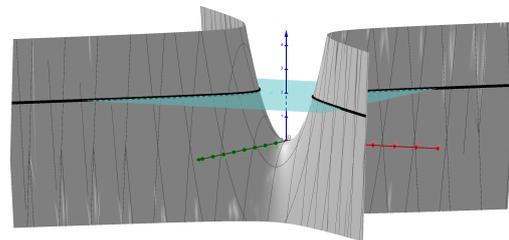
Si on reprend l'exemple de la carte topographique



À tout point (x, y) , $f(x, y)$ est l'altitude du point de coordonnées (x, y) . On comprend alors que l'ensemble des points $(x, y, f(x, y))$ décrit une surface quand (x, y) parcourt une partie du plan. Une courbe de niveaux $f(x, y) = K$ est alors l'intersection de la surface $(x, y, f(x, y))$ avec un plan d'équation $z = k$.



$$x^2 + y^2 = z^2$$



$$x^2 - y^2 = z^2$$

Comprendre une surface à partir de ses lignes de niveaux est un enjeu important.

La fonction f à deux variables ne sera pas toujours définie sur \mathbb{R}^2 . Parfois elle ne sera définie que sur une partie du plan. Mais si f est définie par exemple en un point, il y a peu de chance que $(x, y, f(x, y))$ dessine une surface ! On va rapidement expliquer ce qu'il faut supposer sur l'ensemble de définition pour que l'étude ait un sens.

Ensuite, plus la fonction sera régulière (continue, différentiable...) plus la surface obtenue sera régulière. La plupart des définitions que l'on va voir ici sont valables pour des fonctions à n variables, $n \geq 2$. Nous compléterons l'étude l'an prochain.

6.2 TOPOLOGIE DANS LE PLAN \mathbb{R}^2

On considère ici l'espace euclidien \mathbb{R}^n muni de sa base canonique (e_1, \dots, e_n) orientée positivement. On a

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

On va étudier les fonctions définies sur $A \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R} . Mais la partie A ne doit pas être quelconque. La bonne notion ici est la notion de partie ouverte A .

DÉFINITION 351

(Boules ouvertes) On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r la partie de \mathbb{R}^n définie par

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}.$$

EXEMPLE 352 —

1. Dans \mathbb{R} , la boule ouverte de centre a et de rayon r est le segment $]a - r; a + r[$.
2. Dans \mathbb{R}^2 , $B(a, r)$ est le disque ouvert de centre a et de rayon r .
3. Enfin, dans \mathbb{R}^3 , $B(a, r)$ est la boule de centre a et de rayon r (d'où le nom générique).

DÉFINITION 353

(Parties ouvertes) Une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ est dite ouverte si pour tout point $a \in A$ il existe un $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la boule ouverte $B(a, \varepsilon)$ est incluse dans A . On dit aussi que A est un ouvert de \mathbb{R}^n .

EXEMPLE 354 —

1. Les segments ouverts sont des parties ouvertes de \mathbb{R} . Par contre un segment $[a; b]$ n'est pas un ouvert, car aux bornes a et b on ne peut pas trouver de boules ouvertes incluses dans $[a; b]$; le problème est la présence d'un "bord".
2. Les disques ouverts, les rectangles ouverts $]a; b[\times]c; d[$, le demi-plan ouvert $x > 0$ sont des ouverts du plan. Mais le demi-plan fermé $x \geq 0$ n'est pas un ouvert; le problème est encore la présence d'un bord.
3. Les boules ouvertes ou les pavés ouverts $]a; b[\times]c; d[$ sont des ouverts de \mathbb{R}^3 .

PROPOSITION 355

Une union quelconque d'ouverts est un ouvert et une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Preuve — Soit $A = \bigcup_{i \in J} A_i$ une union quelconque d'ouverts A_i . Alors pour tout $a \in A$ il existe i tel que $a \in A_i$ et alors, comme A_i est ouvert, il existe $B(a, r) \subset A_i \subset A$ et donc A est ouvert.

Pour l'intersection $B = \bigcap_{i=1}^n A_i$, soit $a \in B$, alors $a \in A_i$ pour tout i et donc il existe r_i tel que $B(a, r_i) \subset A_i$, d'où $B(a, r) \subset B$ en posant $r = \min(r_i)$. Ici on utilise le fait que l'intersection est finie pour être sûr que r le minimum existe (et alors, il est non nul). \square

EXEMPLE 356 — La partie $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}^2\}$ est un ouvert de \mathbb{R}^3 , car c'est l'union des ouverts $\{(x, y, z) \mid z > 0\}$ et $\{(x, y, z) \mid z < 0\}$.

Par contre, que vaut $\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*}]\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}[$?

Pour terminer nous définissons une partie bornée de \mathbb{R}^n (comparer avec la définition sur \mathbb{R}) :

DÉFINITION 357

(Partie bornée) On dit qu'une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ est bornée si il existe M tel que

$$\forall u \in A, \|u\| \leq M;$$

ceci est équivalent à dire qu'il existe une boule $B(a, r)$ avec $A \subset B(a, r)$ (prendre $a = 0$ et $r > M$!).

EXEMPLE 358 —

1. La droite d'équation $y = x$ n'est pas une partie bornée du plan.
2. La partie $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^4 + y^8 + z^{10} = 16\}$ est bornée.

6.3 CONTINUITÉ

Dans la suite $U \subset \mathbb{R}^n$ sera toujours une partie ouverte.

DÉFINITION 359

Le graphe Γ_f de $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est l'ensemble des points de \mathbb{R}^3 est

$$\Gamma_f = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\},$$

c'est-à-dire représente une surface de \mathbb{R}^3 .

DÉFINITION 360

(Limites et continuité) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^n$.

1. On dit que f admet une limite l en a , et l'on note alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in U \quad \|x - a\| \leq \delta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

2. On dit que f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in U \quad \|x - a\| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

3. Si f est continue en tout point de U , on dit que f est continue sur U , et note $f \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R}^n)$.

REMARQUE 361 — Notre définition coïncide avec avec la définition de la continuité des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

EXEMPLE 362 —

1. L'application $p_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$ est continue sur \mathbb{R}^2 (il suffit de prendre $\varepsilon = \delta$!).
2. L'application $\| \cdot \| : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|$ est continue sur \mathbb{R}^2 (il suffit encore de prendre $\varepsilon = \delta$!).

Tout comme dans le cas des fonctions réelles, nous donnons les propriétés qui permettent simplement de montrer que des applications de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} sont continues.

PROPOSITION 363

L'ensemble $\mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$ a une structure naturelle de \mathbb{R} -algèbre.

De plus, si $f, g \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur $U \setminus \{g = 0\}$.

PROPOSITION 364

(Composition) Soit $f \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$ et $h \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ avec I et J des intervalles tels que $g(I) \subset U$ et $\text{Im } f \subset J$. Alors

1. $f \circ g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$;
2. $h \circ f \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$.

EXEMPLE 365 —

1. Les applications polynomiales de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues : $(x, y) \mapsto x^7y + y^3 - 3x$ est continue.
2. L'application $g : (x, y, z) \mapsto g(x, y, z) = \exp(x^2 + y^2 + z^2)$ est continue sur \mathbb{R}^3 .
3. L'application $(x, y, z) \mapsto \frac{1 - \cos(xyz)}{xyz}$ est continue sur \mathbb{R} .

REMARQUE 366 — Tout comme dans le cas des fonctions réelles, prouver qu'une fonction n'est pas continue ne se fait quasi jamais de manière directe, mais on utilise des fonctions intermédiaires et on conclut par l'absurde :

1. soit $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ avec $f(0, 0) = 0$. On calcule $f(x, \lambda x)$:

$$f(x, \lambda x) = \frac{\lambda x^2}{x^2 + \lambda^2 x^2} = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}$$

et si f est continue en 0, alors $f(x, \lambda x)$ aussi et devrait avoir pour limite 0 ! Mais, si $\lambda \neq 0$, $\frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \neq 0$, donc f n'est pas continue en 0 : la surface représentant la surface n'est pas continue (il y a un trou).

2. Montrons qu'il suffit de faire tendre le numérateur un peu plus vite vers 0 pour la fonction devienne continue :

$$g : (x, y) \mapsto \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \text{ et } f(0, 0) = 0$$

est continue en 0 car $|f(x, y)| \leq \max(x^2, y^2) \leq \|(x, y)\|^2$.

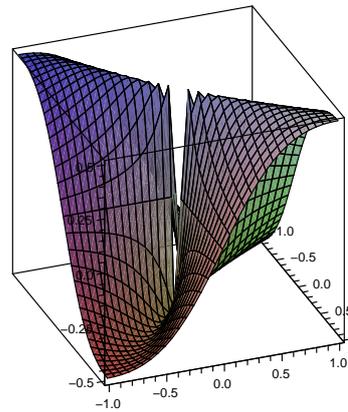
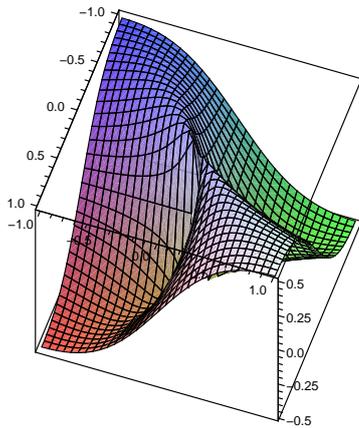
En général, il faudra chercher à majorer astucieusement pour (x, y) proche de a l'expression $\|f(x) - l\|$ pour montrer que f est continue en a si $f(a) = l$.

3. Et même

$$h : (x, y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \text{ et } f(0, 0) = 0$$

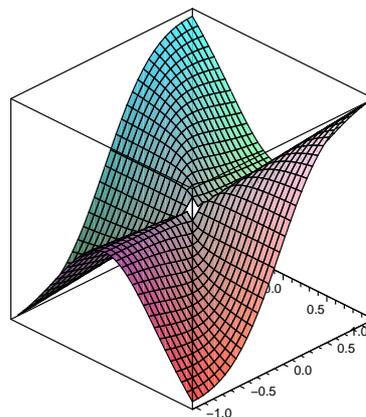
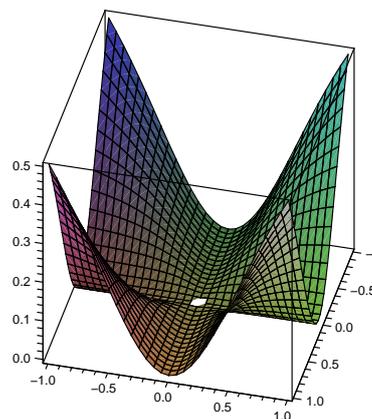
est continue en 0 : on pose $(x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ en coordonnées polaires ; (x, y) tend vers 0 est équivalent à $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ tend vers 0 et $h(x, y) = \rho \cos^2 \theta \sin \theta$. On en déduit que $h(x, y)$ tend vers 0 quand (x, y) tend vers 0.

La fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}$ n'est pas continue en $(0, 0)$:



La fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$

La fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$

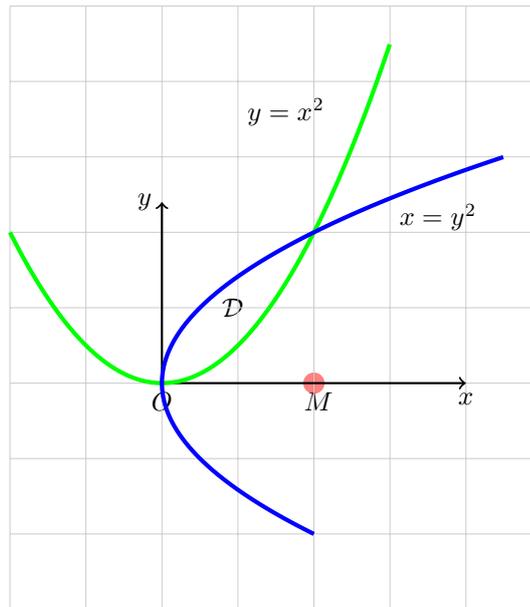


REMARQUE 367 — *Le plus souvent, pour montrer la continuité d'une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, vous écrirez que la fonction est une composée, une somme, un produit ou un quotient de fonctions continues, donc elle est continue là où elle est définie. Trouver l'ensemble de définition n'est pas toujours facile et faire un dessin pourra vous aider.*

Par exemple, soit $f : (x, y) \mapsto \ln(y - x^2) + \sqrt{x - y^2}$. L'ensemble de définition est

$$\mathcal{D} = \{(x, y), | y - x^2 > 0 \text{ et } x - y^2 \geq 0\}.$$

Un dessin permet de mieux ce que représente cet ensemble



La partie \mathcal{D} est comprise entre les courbes vertes et bleues. Mais cette partie n'est pas un ouvert. Pour tout $x \in [0, 1]$, $(x^2, x) \in \mathcal{D}$, mais il n'existe pas de boule centrée en (x^2, x) incluse dans \mathcal{D} . On choisira plutôt $U = \{(x, y), | y - x^2 > 0 \text{ et } x - y^2 > 0\}$.

La fonction f est continue sur U comme somme et composée de fonctions continues.

Pour montrer la continuité, on peut aussi, comme dans le cas réel, vérifier que f est lipschitzienne

DÉFINITION 368

Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. Une application $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est k -lipschitzienne si

$$|f(x) - f(y)| \leq k \|x - y\|.$$

PROPOSITION 369

Une application $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ k -lipschitzienne est continue sur U .

Preuve — On utilise la définition de la continuité :

$$\forall x \in U, \forall \varepsilon > 0, \forall y \in U, \|x - y\| \leq \frac{\varepsilon}{k}, |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

□

REMARQUE 370 — *Enfin, quand on voudra étudier la continuité de f en point (a, b) , on pourra se ramener en $(0, 0)$ en faisant un changement de variable : f est continue en (a, b) si et seulement si $g(h, k) = f(a + h, b + k)$ est continue en $(0, 0)$. Cela peut vous permettre d'utiliser des développements limités.*

EXEMPLE 371 — Montrez que l'application $(x, y) \mapsto \frac{\cos x - \cos y}{x - y}$ se prolonge par continuité en une fonction continue sur \mathbb{R}^2 .

La fonction f est continue en tout point (x, y) avec $x \neq y$ comme composée et quotient de fonctions continues.

En un point $(x, x) \in \mathbb{R}^2$, on écrit

$$f(x+h, y+k) = \frac{\cos(x+h) - \cos(x+k)}{h-k} = \frac{\cos x(\cos h - \cos k) - \sin x(\sin h - \sin k)}{h-k}$$

Or le développement limité de \cos ou de \sin en k donne

$\cos h = \cos k + (h-k)\varepsilon_1(h-k)$ et $\sin h = \sin k + (h-k)\cos k + (h-k)^2\varepsilon_2(h-k)$. avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_i(h) = 0$ pour $i = 1, 2$.

On en déduit que

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(x+h, y+k) = -\sin x.$$

Si vous connaissez bien vos formules trigonométriques on pouvait aussi écrire que

$$f(x, y) = -2 \sin \frac{x+y}{2} \times \frac{\sin \frac{x-y}{2}}{x-y},$$

ce qui redonne le résultat immédiatement.

6.4 DÉRIVÉES PARTIELLES

DÉFINITION 372

Soient un ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$ et une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$. Soit un point $(a, b) \in D$.

1. Si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

existe et est finie, alors ce nombre réel est noté $\partial_1 f(a, b)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ et est appelé la première **dérivée partielle** de f en (a, b) .

2. Si

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}$$

existe et est finie, alors ce nombre réel est noté $\partial_2 f(a, b)$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ et est appelé la deuxième **dérivée partielle** de f en (a, b) .

3. Soit $i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$. Si $\partial_i f(a, b)$ existe pour tout $(a, b) \in D$, alors la fonction $\partial_i f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée la i -ème **dérivée partielle** de f .

4. On dit que la fonction f est de classe C^1 sur D si les 2 dérivées partielles $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ existent et sont continues sur D .

REMARQUE 373 —

Considérons les applications partielles en un point (a, b) :

$$\begin{aligned} f_1 : x &\mapsto f(x, b) && \text{première application partielle, } b \text{ est fixé} \\ f_2 : y &\mapsto f(a, y) && \text{deuxième application partielle, } a \text{ est fixé} \end{aligned}$$

1. La dérivée de f_1 en a existe si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ existe en (a, b) et $f'_1(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$;

2. De même la dérivée de f_2 en b existe si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ existe en (a, b) et $f'_1(b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$;

3. On généralise à une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} .

EXERCICE 374 —

1. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et } f(0, y) = 0.$$

- (a) Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .
 (b) Calculer $\partial_1 f(x, y)$ et $\partial_2 f(x, y)$ si $x \neq 0$.
 (c) Calculer $\partial_1 f(0, y)$ et $\partial_2 f(0, y)$.
 (d) Montrer que la fonction f n'est pas de classe \mathcal{C}^1 .

2. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{et } f(0, 0) = 0.$$

Montrer que les dérivées partielles $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont définies sur \mathbb{R}^2 ; et pourtant nous avons montré que f n'était pas continue en $(0, 0)$.

REMARQUE 375 — Cet exercice montre qu'une fonction qui possède des dérivées partielles partout :

- n'est pas toujours de classe \mathcal{C}^1
 (ce n'est pas très surprenant car, même en dimension 1, une fonction dérivable n'est pas toujours de classe \mathcal{C}^1);
- n'est pas toujours continue (c'est plus surprenant car, en dimension 1, une fonction dérivable est toujours continue).

EXERCICE 376 — Vous pouvez vérifier que la somme et le produit de fonctions de classe \mathcal{C}^1 est encore de classe \mathcal{C}^1 . Même chose pour le quotient dans la mesure où le dénominateur ne s'annule pas. Donc $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ est une \mathbb{R} -algèbre.

6.5 LA FORMULE DE TAYLOR & YOUNG

THÉORÈME 377 (Formule de Taylor & Young)

Soit un ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$ et une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est de classe \mathcal{C}^1 , alors, pour tout $(a, b) \in D$,

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + h\partial_1 f(a, b) + k\partial_2 f(a, b) + \|(h, k)\|\varepsilon(h, k)$$

où $\varepsilon(h, k) \xrightarrow{(h, k) \rightarrow (0, 0)} 0$.

Preuve — Soit donc $(a = (a_1, a_2)$ et $h = (h_1, h_2)$, et nous devons calculer $f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2)$. Nous partageons ce calcul en deux étapes, en écrivant

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) = f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2) + f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2)$$

Alors on reprend les applications partielles f_1 et f_2 , et on note $f'_1(x, y)$ pour $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ de même pour f_2 . Par hypothèse ces deux fonctions sont de classe \mathcal{C}^1 , donc on peut appliquer le théorème des accroissements finies

a) à $f_1(x, a_2 + h_2)$ sur l'intervalle entre a_1 et $a_1 + h_1$:

$$\exists \theta \in]0; 1[, f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2) = f'_1(a_1 + \theta h_1, a_2 + h_2) \times h_1$$

b) à $f_2(a_1, y)$ sur l'intervalle entre a_2 et $a_2 + h_2$:

$$\exists \theta' \in]0; 1[, f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) = f'_2(a_1, a_2 + \theta h_2) \times h_2$$

On en déduit que

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a_1 + \theta h_1, a_2 + h_2) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2 + \theta h_2)$$

et donc on a $\varepsilon(h_1, h_2)$ vaut

$$\frac{h_1}{\|(h_1, h_2)\|} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_1 + \theta h_1, a_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) \right) + \frac{h_2}{\|(h_1, h_2)\|} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2 + \theta h_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) \right)$$

Il reste à montrer que ε tend vers 0 si (h_1, h_2) tend vers 0, ce qui est acquis car $\left| \frac{h_i}{\|(h_1, h_2)\|} \right| \leq 1$ et si (h_1, h_2) tend vers $(0, 0)$, alors θh_1 et $\theta' h_2$ tendent vers 0 et par continuité des dérivées partielles ε tend vers 0. \square

COROLLAIRE 378

Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe \mathcal{C}^1 est continue sur U .

Preuve — $f(a+h, b+k) - f(a, b) = h\partial_1 f(a, b) + k\partial_2 f(a, b) + \|(h, k)\|\varepsilon(h, k) \xrightarrow{(h, k) \rightarrow (0, 0)} 0$. □

DÉFINITION 379

Soit un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ et une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est de classe \mathcal{C}^1 , alors, l'application

$$\begin{aligned} df : U &\rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \\ (a, b) &\mapsto df_{(a, b)} : (h, k) \mapsto h\partial_1 f(a, b) + k\partial_2 f(a, b) \end{aligned}$$

s'appelle l'application différentielle de f et $df_{(a, b)}$ est l'application différentielle de f en (a, b) .

REMARQUE 380 — La formule de Taylor & Young est un développement limité (D.L.) de la fonction f , à l'ordre 1, au voisinage de (a, b) :

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= f(a, b) + h\partial_1 f(a, b) + k\partial_2 f(a, b) + \|(h, k)\|\varepsilon(h, k) \\ &= f(a, b) + d_{(a, b)}f(h, k) + \|(h, k)\|\varepsilon(h, k) \end{aligned}$$

Cela doit vous rappeler la formule de Taylor à l'ordre 1 pour les fonctions dérivables $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \times h + h\varepsilon(h).$$

La différentielle de f en (a, b) a un rôle similaire à la dérivée pour les fonctions à une variable. Nous précisons cela dans le paragraphe suivant.

6.6 LE GRADIENT

La différentielle peut se réécrire comme un produit scalaire :

$$df_{(a, b)}(h, k) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a, b) \\ \partial_2 f(a, b) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}.$$

Le vecteur (h, k) est le déplacement, il ne dépend pas de la fonction f . Le vecteur $(\partial_1 f(a, b), \partial_2 f(a, b))$ ne dépend pas du déplacement mais dépend de la fonction f et du point (a, b) : on le note

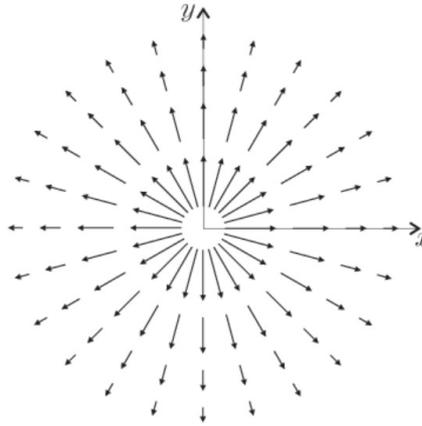
$$\overrightarrow{\text{grad}}f(a, b) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a, b) \\ \partial_2 f(a, b) \end{pmatrix}$$

ou $\overrightarrow{\nabla}f(a, b)$ et on l'appelle **le gradient** de f en (a, b) .

EXEMPLE 381 — La fonction f définie par $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et

$$\forall (x, y) \neq (0, 0), \quad \overrightarrow{\text{grad}}f(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2} \right)$$

La figure ci-dessous représente en chaque point (x, y) différent de l'origine ce vecteur gradient, qui dépend de (x, y) . On obtient ainsi **un champ de vecteurs**.

LE CHAMP DES GRADIENTS DE $\ln(x^2 + y^2)$

Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

On décide de se déplacer dans le plan \mathbb{R}^2 , le long d'une courbe paramétrée par

$$x = x(t) \quad \text{et} \quad y = y(t)$$

pour tout t appartenant à un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On suppose que les fonctions x et y sont de classe \mathcal{C}^1 et que, à chaque instant $t \in I$, le point $M(t) = (x(t), y(t))$ appartient à D . En ce point, la valeur de la fonction f est donc

$$f(x(t), y(t)) = (f \circ M)(t).$$

LEMME 382

La fonction $f \circ M : I \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe \mathcal{C}^1 et, pour tout $t \in I$,

$$(f \circ M)'(t) = x'(t)\partial_1 f(x(t), y(t)) + y'(t)\partial_2 f(x(t), y(t)).$$

Preuve — Pour tout $t \in I$,

$$x(t+u) = x(t) + ux'(t) + u\varepsilon_1(u) \quad \text{et} \quad y(t+u) = y(t) + uy'(t) + u\varepsilon_2(u)$$

car x et y sont de classe \mathcal{C}^1 sur I .

Pour tout $(a, b) \in D$,

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + h\partial_1 f(a, b) + k\partial_2 f(a, b) + \|(h, k)\|\varepsilon(h, k)$$

car f est de classe \mathcal{C}^1 sur D .

$$\text{D'où } f \circ M(t+u) = f \circ M(t) + u[x'(t)\partial_1 f(x(t), y(t)) + y'(t)\partial_2 f(x(t), y(t))] + u\varepsilon_3(u).$$

$$\text{Par suite } \frac{f \circ M(t+u) - f \circ M(t)}{u} \xrightarrow{u \rightarrow 0} x'(t)\partial_1 f(x(t), y(t)) + y'(t)\partial_2 f(x(t), y(t)).$$

Donc $f \circ M$ est dérivable. Et cette dérivée est continue car les fonctions x' , y' , $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont continues. \square

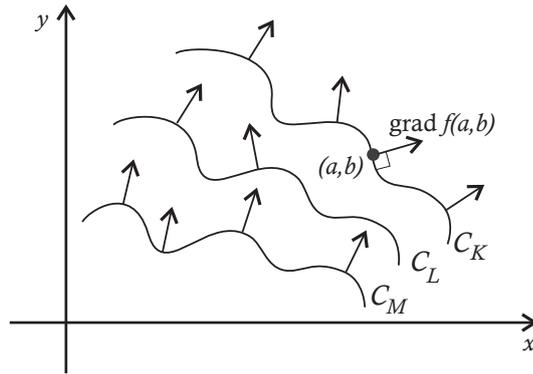
On peut réécrire $(f \circ M)'(t)$ comme un produit scalaire :

$$(f \circ M)'(t) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x(t), y(t)) \\ \partial_2 f(x(t), y(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

Le premier vecteur est $\overrightarrow{\text{grad}} f(M(t))$. Le second vecteur est le vecteur vitesse $\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t))$.

On en déduit que : $(f \circ M)'(t) = 0$ si, et seulement si, le vecteur vitesse est orthogonal au gradient.

En particulier, si la fonction f est constante le long de la trajectoire du point $M(t)$, alors le gradient de f est orthogonal au vecteur vitesse en chaque point de la trajectoire. Or le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire. Donc **le gradient de f est orthogonal à la courbe de niveau de f .**

COURBES DE NIVEAUX $K > L > M$ ET GRADIENT D'UNE FONCTION f

EXERCICE 383 — Déterminer une équation de la droite tangente à l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$ au point $(\sqrt{2}, 1)$.

DÉFINITION 384

Soient $A_1 = (a_1, b_1)$ et $A_2 = (a_2, b_2)$ deux points de \mathbb{R}^2 : l'ensemble des points

$$M(t) = A_1 + t(A_2 - A_1) = (1-t)A_1 + tA_2, \quad \text{où } t \in [0, 1]$$

est appelé le **segment** $[A_1, A_2]$. On dit qu'une partie $D \subset \mathbb{R}^2$ est **convexe** si

$$\forall (A_1, A_2) \in D^2, \quad [A_1, A_2] \subset D.$$

EXEMPLE 385 —

1. Une droite, une boule ouverte de \mathbb{R}^2 sont des convexes.
2. Un demi plan : $ax + by + c > 0$ est un convexe.
3. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ n'est pas un convexe.

PROPOSITION 386

Soient un ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$ convexe et une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur D . La fonction f est constante sur D si, et seulement si, son gradient est nul sur D .

Preuve —

Si la fonction f est constante, alors toutes ses dérivées partielles sont nulles, donc le gradient est nul en tout point de D .

Réciproquement : soient deux points $(A_1, A_2) \in D^2$ et la courbe paramétrée $M : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto A_1 + t(A_2 - A_1)$. La partie D est convexe, d'où la trajectoire $[A_1, A_2] = M([0, 1])$ est incluse dans D . D'après le lemme, la fonction $f \circ M$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$, d'où

$$f(A_2) - f(A_1) = \int_0^1 (f \circ M)'(t) dt = \int_0^1 \vec{v}(t) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f(M(t)) dt,$$

où $\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t))$ est la vitesse. Si le gradient est nul en tout point de D , alors $f(A_2) = f(A_1)$. Donc f est constante sur D . \square

6.7 EXTREMA LOCAUX

Dans cette partie on considère $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, où U est une partie non vide de \mathbb{R}^n .

DÉFINITION 387

On dit que f admet un maximum (resp. minimum) local en $a \in U$, si il existe une boule ouverte $B(a, \varepsilon)$ telle que

$$\forall x \in B(a, \varepsilon) \cap U, \quad f(x) \leq f(a) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(a)).$$

Si f admet un minimum ou un maximum local en a , on dit que f admet un extremum local. De même, f admet un maximum (resp. minimum) global ou absolu si

$$\forall x \in U, f(x) \leq f(a) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(a)).$$

PROPOSITION 388

On suppose que $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur Ω ouvert de \mathbb{R}^n . Si f admet un extremum local en $(a, b) \in \Omega$, alors $\text{grad } f(a, b) = 0$. Mais la condition n'est pas suffisante : le gradient peut s'annuler sans que l'on ait un extremum local.

Preuve — Supposons que $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \partial_1 f(a, b) \neq 0$. Alors

$$f(a+h, b) = f(a, b) + h\partial_1 f(a, b) + o(h),$$

ce qui montre que f n'admet ni un maximum, ni un minimum en a .

Même pour les fonctions réelles, l'annulation de la dérivée n'entraîne pas l'existence d'un extremum local (penser à $x \mapsto x^3$ en 0). \square

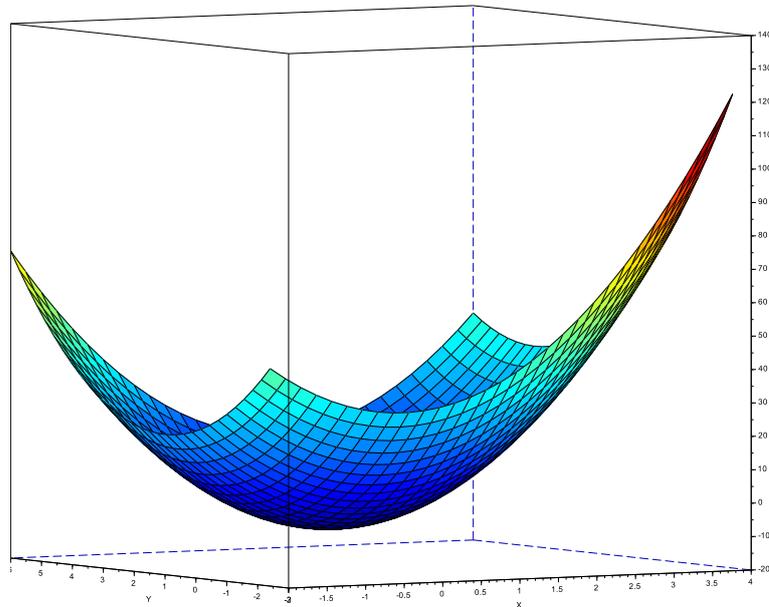
EXEMPLE 389 — Soit $f(x, y) = 5x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 8y$ sur l'ouvert \mathbb{R}^2 . On a

$$\text{Grad } f(x, y) = (10x - 2y - 2, 4y - 2x - 8),$$

donc s'annule en $(\frac{2}{3}, \frac{7}{3})$, le seul extremum possible :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{3} + h, \frac{7}{3} + k\right) &= 5h^2 + 2k^2 - 2hk - 10 \\ &= 5h^2 + 2k^2 + (h-k)^2 - h^2 - k^2 + f\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right) \\ &= f\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right) + 4h^2 + k^2 + (h-k)^2 \end{aligned}$$

d'où f présente un minimum global en $(\frac{2}{3}, \frac{7}{3})$.



REMARQUE 390 — Il faut se placer sur un ouvert (comme pour les fonctions réelles, il fallait être sur un intervalle ouvert), comme le montre l'exemple suivant : $f(x, y) = x^2 + y^2$ sur $\overline{B}(0, 1)$, la boule fermée, c'est-à-dire les X tels que $\|X\| \leq 1$: la fonction admet un extremum en tout point de la frontière sans que

le gradient ne s'annule.

Stratégiquement, si la fonction n'est pas définie sur un ouvert, on étudie les extrema éventuels de f sur la frontière, puis on étudie f sur l'intérieur (l'ouvert restant).

EXEMPLE 391 — (Un exemple où le gradient est nul mais pas d'extremum) Si $f(x, y) = y(y - x^2)$, alors le gradient s'annule en 0, mais $f(0, y) > 0$, si $y \neq 0$ et $f(x, \frac{x^2}{2}) = -\frac{x^4}{4} < 0$ si $x \neq 0$; donc f n'admet pas d'extremum en 0.

