Feuille de TD n° 1

Ensembles et groupe symétrique

9 septembre 2020

Exercice 1.

1. Soient $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - y = 1\}$ et $B = \{(t+1, 4t+3),\ t \in \mathbb{R}\}$. Démontrer que $A = B$.
2. Déterminer l'intersection de $A = \left\{ \dfrac{k}{2^n},\ (k,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$ et $\mathbb{Z}$.
3. Déterminer les ensembles suivants :
   (a) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$,
   (b) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[0, \frac{1}{n}\right[$,
   (c) $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[k - \frac{1}{n}, k + \frac{1}{n}\right]$.

Exercice 2. Soient A, B et C trois parties de E. Démontrer les propositions suivantes :

1. $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$,
2. $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$,
3. $\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \Leftrightarrow B = C$,
4. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Exercice 3. Soient A, B et C des parties de E. On appelle différence symétrique de A et B l'ensemble

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1. Démontrer que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
2. Démontrer que $A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow B = C$.

Exercice 4. Soient deux ensembles E et F.

1. Soit a un élément de E. Décrire $\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(\{a\})\big)$
2. (a) Comparer $\mathcal{P}(E \cap F)$ et $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.
   (b) Comparer $\mathcal{P}(E \cup F)$ et $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$.

Exercice 5 (Groupe symétrique)**.** Décomposer en cycles disjoints et en transpositions les permutations suivantes :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 4 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in S_8 \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_n.$$

Exercice 6 (Groupe symétrique)**.** Soient $n \geq p \geq 2$. Soit $\sigma = (a_1, \dots, a_p)$ un p-cycle de S_n. Montrer que, pour tout élément ρ de S_n, la permutation $\rho \circ \sigma \circ \rho^{-1}$ est un p-cycle qu'on déterminera.

Exercice 7 (Groupe symétrique, *EMS 2016-2017*)**.**
Soit n un entier naturel non nul.

1. Écrire le cycle $(1,2,3,4)$ comme la composée de transpositions de la forme $(1,i)$, où $i \in [\![1,4]\!]$. Votre solution est-elle unique ?
2. Soient x et y deux éléments distincts dans $[\![1,n]\!]$. Soit la permutation $f = (1,x) \circ (1,y) \circ (1,x)$. Calculer $f(z)$ pour chaque $z \in [\![1,n]\!]$.
3. Montrer que toute permutation de $[\![1,n]\!]$ est la composée de transpositions de la forme $(1,i)$, où $i \in [\![1,n]\!]$.