Feuille de TD n° 2

Ensembles, applications et groupes.

27 septembre 2020

Exercice 1. Soient E et F deux ensembles. Soient A et C deux parties de E et B et D deux parties de F. Démontrer que

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

Exercice 2. Démontrer que la relation $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ définit une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3.

1. Écrire la fonction $f :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ comme la composée de trois fonctions.
2. Soient f et g des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
$$f(n) = 2n \quad \text{et} \quad g(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair,} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$
Justifier que les applications f et g sont bien définies puis calculer $g \circ f$ et $f \circ g$. A-t-on $g \circ f = f \circ g$?
3. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Soit A une partie de E. Montrer que $(g \circ f)(A) = g(f(A))$.

Exercice 4. Déterminer l'image directe $f(I)$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = x \exp(x)$ et $\mathbb{R}_-$,
2. $f(x) = 1 + x^2 + x^3$ et $I = \left[-\dfrac{4}{5}, \dfrac{1}{6}\right]$,
3. $f(x) = x^n \ln(x)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $I = \mathbb{R}_+^*$,
4. $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$ et $I =]0, 1]$,
5. $f(z) = z^2$ et $I = \mathbb{C}$,
6. $f(x) = x + \mathrm{E}(x)$ où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de x et $I = \mathbb{R}_+$,
7. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $(x, y) \longmapsto (x + y, xy)$ et $I = \mathbb{R}^2$.

Exercice 5. Soit $(S_n, \circ)$ le groupe des permutations de $[\![1, n]\!]$. On pose $\tau = (1, 2)$ et $\sigma = (1\ 2\ \cdots\ n)$.

1. Pour $k \in [\![0, n-2]\!]$, calculer $\sigma^k \tau \sigma^{-k}$.
2. Montrer que toute transposition (i, j) peut s'écrire comme un produit de transpositions de la forme $(i, i+1)$.
3. En déduire le sous-groupe de S_n engendré par σ et τ.

Exercice 6. Les ensembles suivants sont-ils des groupes ?

1. $(\mathbb{R}, \perp)$, avec $x \perp y = x + y - 1$;
2. $(\mathbb{R}, \top)$, avec $x \top y = x + xy + y$;
3. $(\mathbb{C}, \triangle)$, avec $z \triangle z' = xx' + i(xy' + x'y)$.

Exercice 7. Soit H un sous-groupe strict de G. Le complémentaire de H est-il un sous-groupe ?

Exercice 8. Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne . associative, qui possède un élément neutre à droite e (ie pour tout x de G, $x.e = x$) et tel que tout élément x possède un inverse à droite x' (ie $xx' = e$). Montrer que G est un groupe.

Indications

Exercice 1

Procéder par double inclusion.

Rappel : Un élément du produit cartésien $E \times F$ s'écrit sous la forme (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$.

Exercice 2

Le seul point à vérifier est que f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Il faut donc démontrer que $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.

On peut partir de $x^2 + 1 \geq x^2$.

Attention à la simplification de $\sqrt{x^2}$...

Exercice 3

1.
2.
3. Procéder par double inclusion.
   Utiliser les définitions de $g \circ f$ et $g(B)$ où B est un sous-ensemble.
   Rappel : $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A, y = f(x)$.

Exercice 4

1. Utiliser un tableau de variations
2. Idem
3. Idem
4. Commencer par regarder $g(I)$ où $g(x) = \dfrac{\pi}{x}$. Ici, on peut utiliser le résultat de la question 3 de l'exercice 3.
5. Montrer que $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Une inclusion facile. On pourra utiliser la notation sous forme polaire d'un nombre complexe.
6. *Plus difficile.* Montrer que $f(\mathbb{R}_+) = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [2n, 2n+1[$, en procédant par double inclusion.
   Rappel : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{E}(x) \leq x < \mathrm{E}(x) + 1$ et $\mathrm{E}(x) \in \mathbb{N}$.
7. *Plus difficile.* Montrer que $f(\mathbb{R}^2) = \big\{(s,p) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 - 4p > 0\big\}$.
   Utiliser la relation coefficients-racines pour un polynôme de degré 2.

Exercice 5

1. On pourra utiliser le résultat de l'exercice 6 du TD1.
2. Regarder pour les transpositions de la forme $(i, i+k)$.
3. Montrer que toute transposition peut s'écrire comme un produit de σ et τ. Conclure.

Exercice 6

Utiliser la définition d'un groupe. Selon les cas, on pourra montrer que certains éléments n'ont pas de symétrique.

Exercice 7

Revenir à la définition d'un groupe.