Feuille de TD n° 2

Ensembles, applications et groupes.

28 septembre 2020

Exercice 1. Soient E et F deux ensembles. Soient A et C deux parties de E et B et D deux parties de F. Démontrer que
$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

Démontrons le résultat par double-inclusion.

$\triangleright$ Soit $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$. D'une part, $(x, y) \in A \times B$, donc $x \in A$ et $y \in B$. D'autre part, $(x, y) \in C \times D$, donc $x \in C$ et $y \in D$. Finalement, $x \in A \cap C$ et $y \in B \cap D$. Donc $(x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$. D'où $(A \times B) \cap (C \times D) \subset (A \cap C) \times (B \cap D)$.

$\triangleleft$ Réciproquement, soit $(x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$. Alors $x \in A \cap C$ et $y \in B \cap D$. D'une part, $x \in A$ et $y \in B$, donc $(x, y) \in A \times B$. D'autre part, $x \in C$ et $y \in D$, donc $(x, y) \in C \times D$. Finalement, $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$. D'où $(A \cap C) \times (B \cap D) \subset (A \times B) \cap (C \times D)$.

D'où le résultat.

Exercice 2. Démontrer que la relation $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ définit une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Par la relation f, tout élément de $\mathbb{R}$ possède une et une seule image. Vérifions que cette image appartient à $\mathbb{R}_+$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a $x^2 + 1 > x^2$. La fonction $\sqrt{\cdot}$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a alors $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x|$.

Donc $x + \sqrt{x^2 + 1} > x + |x|$.

Or $|x| = \max(x, -x) \geq -x$.

Donc $x + \sqrt{x^2 + 1} > x + |x| \geq 0$, soit $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$.

Donc $f(x) > 0$ et f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Donc f définit bien une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3.

1. Écrire la fonction $f :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$ comme la composée de trois fonctions.
2. Soient f et g des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
$$f(n) = 2n \quad \text{et} \quad g(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair,} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$
Justifier que les applications f et g sont bien définies puis calculer $g \circ f$ et $f \circ g$. A-t-on $g \circ f = f \circ g$?
3. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Soit A une partie de E. Montrer que $(g \circ f)(A) = g(f(A))$.

---

1. Posons $g_1 :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+^*$; $x \longmapsto x - 1$, $g_2 : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$; $x \longmapsto \sqrt{x}$ et $g_3 : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$. Ces applications sont bien définies et $h = g_3 \circ g_2 \circ g_1$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $2n \in \mathbb{N}$ donc f est bien à valeurs dans $\mathbb{N}$ et tout élément de $\mathbb{N}$ possède une unique image par f qui est dans $\mathbb{N}$. L'application f est donc bien définie.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Si n est pair alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$, donc $g(n) = \dfrac{2p}{2} = p \in \mathbb{N}$. Si n est impair alors $g(n) = 0 \in \mathbb{N}$. Donc g est bien à valeurs dans $\mathbb{N}$ et tout élément de $\mathbb{N}$ possède une unique image par g qui est dans $\mathbb{N}$. L'application g est donc bien définie.

   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   On a $(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(2n)$ et comme $2n$ est pair, $g(2n) = \dfrac{2n}{2} = n$. Donc $g \circ f(n) = n$ et $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.
   Pour calculer $f \circ g$, distinguons les cas.
   Si n est pair, alors $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f\left(\dfrac{n}{2}\right) = 2 \times \dfrac{n}{2} = n$.
   Si n est impair, alors $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(0) = 2 \times 0 = 0$.
   Ainsi, on a $(g \circ f)(1) = 1$ et $(f \circ g)(1) = 0$, et on en déduit donc que $g \circ f \neq f \circ g$.
3. Montrons le résultat par double inclusion.
   $\triangleright$ Soit $y \in (g \circ f)(A)$. Alors il existe $x \in A$ tel que $y = (g \circ f)(x)$. Donc, par définition de la composition, $y = g(f(x))$. Posons $z = f(x)$. Alors $y = g(z)$ et $z = f(x) \in f(A)$ car $x \in A$. Donc $y \in g(f(A))$. D'où, $(g \circ f)(A) \subset g(f(A))$.
   $\triangleleft$ Réciproquement, soit $y \in g(f(A))$. Par définition, il existe $z \in f(A)$ tel que $y = g(z)$. Comme $z \in f(A)$, il existe $x \in A$ tel que $z = f(x)$. Donc $y = g(f(x)) = (g \circ f)(x) \in (g \circ f)(A)$. D'où $g(f(A)) \subset (g \circ f)(A)$.
   D'où le résultat.

Exercice 4. Déterminer l'image directe $f(I)$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = x\exp(x)$ et $\mathbb{R}_-$,
2. $f(x) = 1 + x^2 + x^3$ et $I = \left[-\dfrac{4}{5}, \dfrac{1}{6}\right]$,
3. $f(x) = x^n \ln(x)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $I = \mathbb{R}_+^*$,
4. $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$ et $I =]0, 1]$,
5. $f(z) = z^2$ et $I = \mathbb{C}$,
6. $f(x) = x + \mathrm{E}(x)$ où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de x et $I = \mathbb{R}_+$,
7. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $(x, y) \longmapsto (x + y, xy)$ et $I = \mathbb{R}^2$.

Pour les trois premières questions, faire un tableau de variations.

1. $f(I) = \left[-\dfrac{1}{\mathrm{e}}, 0\right]$.
2. $f(I) = \left[1, \dfrac{31}{27}\right]$.
3. $f(I) = \left[-\dfrac{1}{ne}, +\infty\right[$.
4. Posons $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto \dfrac{\pi}{x}$. On a $g(]0, 1]) = [\pi, +\infty[$.
   On a donc $f(I) = (\sin \circ g)(I) = \sin(g(]0, 1])) = \sin([\pi, +\infty[) = [-1, 1]$.
5. $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.
   On a bien sûr $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$ car f est à valeurs dans $\mathbb{C}$. Montrons l'inclusion réciproque.
   Soit $z \in \mathbb{C}$. Il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$. Posons $z_0 = \frac{r}{2}\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}$. Alors $z = z_0^2 = f(z_0)$ et $z_0 \in \mathbb{C}$.
   Donc $z \in f(\mathbb{C})$. Donc $\mathbb{C} \subset f(\mathbb{C})$.
   D'où $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.
6. *Plus difficile.*
   Montrons que $f(\mathbb{R}_+) = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [2n, 2n + 1[$.
   Procédons par double inclusion.
   $\triangleright$ Soit $y \in f(\mathbb{R}_+)$. Alors $\mathrm{E}(y) \leq y < \mathrm{E}(y) + 1$, donc $2\mathrm{E}(y) \leq y + \mathrm{E}(y) < 2\mathrm{E}(y) + 1$. Comme $\mathrm{E}(y) \in \mathbb{N}$, on a $f(y) = y + \mathrm{E}(y) \in [2\mathrm{E}(y), 2\mathrm{E}(y) + 1[\subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [2n, 2n + 1[$.
   $\triangleleft$ Réciproquement, soit $y \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [2n, 2n + 1[$.
   Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $y \in [2n_0, 2n_0 + 1[$.
   Posons $x = y - n_0$. Comme $y \geq 2n_0 \geq n_0$, x est un élément de $\mathbb{R}_+$. Montrons que $y = f(x)$.
   On a $2n_0 \leq y < 2n_0 + 1$, donc $n_0 \leq y - n_0 < n_0 + 1$, soit $n_0 \leq x < n_0 + 1$.
   De ces inégalités, on en déduit que $n_0 = \mathrm{E}(x)$.
   De $x = y - n_0$, on obtient $y = x + n_0 = x + \mathrm{E}(x)$.
   Donc $y = f(x) \in f(\mathbb{R}_+)$.
   D'où $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [2n, 2n + 1[\subset f(\mathbb{R}_+)$.
   Donc $f(\mathbb{R}_+) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [2n, 2n + 1[$.

7. *Plus difficile.*
Soit $(s,p) \in f\left(\mathbb{R}^2\right)$. Alors il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(s,p) = f(x,y) = (x+y, xy)$. On a donc $s = x+y$ et $p = xy$.
Le polynôme $X^2 - sX + p$ admet donc deux racines réelles, x et y. On en déduit que le discriminant de ce polynôme est strictement positif, c'est-à-dire $s^2 - 4p > 0$.
Donc $f\left(\mathbb{R}^2\right) \subset \left\{(s,p) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 - 4p > 0\right\}$.
Réciproquement, soit $(s,p) \in \mathbb{R}^2$ tel que $s^2 - 4p > 0$. Alors le polynôme $X^2 - sX + p$ a un discriminant strictement positif et il admet donc deux racines réelles x et y. On a alors $x + y = s$ et $xy = p$. Donc $(s,p) = f(x,y) \in f(\mathbb{R}^2)$.
Ainsi, $f(\mathbb{R}^2) = \left\{(s,p) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 - 4p > 0\right\}$.

Exercice 5. Soit $(S_n, \circ)$ le groupe des permutations de $[\![1, n]\!]$. On pose $\tau = (1,2)$ et $\sigma = (1\ 2\ \cdots\ n)$.

1. Pour $k \in [\![0, n-2]\!]$, calculer $\sigma^k \tau \sigma^{-k}$.
2. Montrer que toute transposition (i,j) peut s'écrire comme un produit de transposition de la forme $(i, i+1)$.
3. En déduire le sous-groupe de S_n engendré par σ et τ.

---

1. Par récurrence $\sigma^k \tau \sigma^{-1} = (k+1, k+2)$ pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$.
2. Si $j + 1 < i$, $(i,j) = (j, j+1)(i, j+1)(j, j+1)$ et on recommence avec $(i, j+1)$ si $j + 2 < I$ et sinon, on a fini.
3. Le cours nous dit que S_n est engendré par les transpositions et les questions 1 et 2 montrent que le groupe engendré par τ et σ contient toutes les permutations. On en déduit que le groupe engendré par τ et σ vaut exactement S_n.

Exercice 6. Les ensembles suivants sont-ils des groupes ?

1. $(\mathbb{R}, \perp)$, avec $x \perp y = x + y - 1$;
2. $(\mathbb{R}, \top)$, avec $x \top y = x + xy + y$;
3. $(\mathbb{C}, \triangle)$, avec $z \triangle z' = xx' + i(xy' + x'y)$.

1/ oui, on commence par montrer que la loi est commutative et associative puis que l'élément neutre est 1. Le symétrique de x est $x + 2$; 2/Non : Chercher le neutre puis symétrique de -1 ; 3/Non : Chercher le symétrique d'un imaginaire pur.

Exercice 7. Soit H un sous-groupe strict de G. Le complémentaire de H est-il un sous-groupe ?

Par définition, $e \in H$, l'élément neutre du groupe, donc $e \notin \overline{H}$ et $\overline{H}$ n'est pas un sous-groupe.

Exercice 8. Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne . associative, qui possède un élément neutre à droite e (ie pour tout x de G, $x.e = x$) et tel que tout élément x possède un inverse à droite x' (ie $xx' = e$). Montrer que G est un groupe.

Soit $x \in G$, d'inverse à droite x'. Soit y inverse à droite de x' :

$$x'y = e \text{ et } xx'y = ey \Rightarrow x.e = e.y = x$$

et donc $x'ey = e$ soit $x'x = e$. Il reste à vérifier que e est bien un élément neutre à gauche : $ex = xx'x = xe = x$.