北航中法工程师学院
Centrale Pékin

Algèbre 1

École Centrale de Pékin

Cours de mathématiques du cycle préparatoire

10 septembre 2020

Chapitre 1 Ensembles

Table des matières du chapitre

1.1 Premières définitions et notations

Dans cette première partie, nous revenons sur les notions d'ensemble, d'élément, d'appartenance et d'inclusion.

Définition 1

- *Un* ***ensemble*** E *est une collection d'objets, appelés* ***éléments*** *de* E.
- *On dit que* x ***appartient*** *à* E *si* x *est un élément de l'ensemble* E*, et on note* $x \in E$.
- *Deux ensembles* E *et* F *sont* ***égaux*** *s'ils ont les mêmes éléments :* $\forall x, (x \in E \Leftrightarrow x \in F)$.
  On note $E = F$.

On privilégie les lettres capitales (E, X, A, ...) pour désigner les ensembles et les lettres minuscules (a, b, x, ...) pour désigner leurs éléments.

Un ensemble n'est pas forcément un ensemble de nombres. Si E est l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ alors x désigne un nombre réel, mais si E est l'ensemble des suites réelles, alors x désigne une suite réelle ou si E est l'ensemble des droites du plan, alors x désigne une droite du plan.

Il existe plusieurs façons de décrire un ensemble.

- On peut donner la liste de tous les éléments de l'ensemble E entre accolades $\{\ \}$, les éléments étant séparés par des virgules. Soit on explicite tous les éléments de E, par exemple $E = \{a, b, c, d\}$, soit on en écrit seulement quelques-uns suivis de points de suspension, par exemple $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
  L'ordre des éléments n'a aucune importance : les ensembles $\{a, b\}$ et $\{b, a\}$ sont égaux. De plus, un élément ne peut pas appartenir plusieurs fois à un ensemble et s'il apparait plusieurs fois dans la liste, il s'agit en fait du même élément : les ensembles $\{a, b, a\}$ et $\{a, b\}$ sont égaux car ils ont les mêmes éléments. Par convention, chaque élément est généralement énuméré une seule fois.
- On peut définir un ensemble F par une propriété $\mathcal{P}$ qui caractérise les éléments de F parmi les éléments d'un ensemble connu E : $F = \{x \in E \mid \mathcal{P}(x)\}$. On dit que F est l'ensemble des éléments x de E tels que x vérifie la propriété $\mathcal{P}$.
  Cas particulier : Si F est un sous-ensemble de E et f est une application [1] de E dans F, alors l'ensemble $\{y \in F \mid \exists\, x \in E,\ y = f(x)\}$ se note plus simplement $\{f(x),\ x \in E\}$ en remplaçant $f(x)$ par son expression. On dit que c'est l'ensemble des $f(x)$ lorsque x parcourt E.
  Par exemple, $\{x^2,\ x \in \mathbb{N}\} = \{0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots\}$.

1. La notion d'application sera introduite dans le chapitre 2. Intuitivement, une application de E dans F associe à chaque élément de E un élément de F.

Exemples 2

- *L'ensemble E des entiers naturels n tels que n est inférieur ou égal à 4 peut s'écrire*

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 4\} \text{ ou } E = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

- *Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble E des entiers naturels m tels que $1 \leq m \leq n$ peut s'écrire*

$$E = \{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leq m \leq n\} \text{ ou } E = \{1, \ldots, n\}.$$

  On utilise également la notation $[\![1, n]\!]$ pour désigner cet ensemble.
  Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq p$, les notations $\{n, \ldots, p\}$ ou $[\![n, p]\!]$ désignent l'ensemble des entiers naturels compris entre n et p.

- *L'ensemble P des entiers naturels pairs peut s'écrire*

$$P = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ est pair }\} \text{ ou } P = \{2k,\ k \in \mathbb{N}\},$$

  Cet ensemble est encore noté parfois $2\mathbb{N}$.

- *L'ensemble des nombres réels x tels que $0 \leq x \leq 1$ peut s'écrire*

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}.$$

  Il s'agit de l'intervalle noté $[0, 1]$.
  Plus généralement, pour tout a et tout b éléments de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ est l'intervalle noté $[a, b]$.

Définition 3

- *On appelle **ensemble vide** \空集\, noté $\emptyset$, l'ensemble ne contenant aucun élément.*
- *Un ensemble constitué d'un unique élément x est appelé un **singleton** \单元集\. Il est donc de la forme $\{x\}$.*
- *Un ensemble constitué de deux éléments distincts a et b est appelé une **paire** \二元集合\. Il est donc de la forme $\{a, b\}$.*

Remarque 4 — *On a bien sûr $\{a, b\} = \{b, a\}$.*

Définition 5
Soient E et F deux ensembles.

- *On dit que E est **inclus** \包含\ dans F si tout élément de E est un élément de F :*

$$\forall x,\ (x \in E \Rightarrow x \in F) \text{ ou encore } \forall x \in E,\ x \in F.$$

  *On note $E \subset F$. On dit aussi que E est une **partie** (ou un sous-ensemble) de F.*
- *On dit que E est **strictement inclus** dans F si $E \subset F$ et $E \neq F$.*

Méthode 6 — *Ainsi, pour démontrer que E est inclus F, on commence par se donner un élément quelconque x de E en écrivant « Soit $x \in E$. » Il s'agit ensuite de montrer que x est un élément de F.*

Exemples 7

- *Tout ensemble E est inclus dans lui-même : $E \subset E$.*
- *L'ensemble vide est inclus dans tout ensemble E : $\emptyset \subset E$.*
- *L'ensemble $\{a, c\}$ est strictement inclus dans l'ensemble $\{a, b, c\}$: $\{a, c\} \subset \{a, b, c\}$.*
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, *les inclusions étant strictes.*
- $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.
- $\{2p \mid p \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$.

Il ne faut pas confondre l'appartenance et l'inclusion : on a $2 \in \{2,4,5\}$ mais $2 \not\subset \{2,4,5\}$, et $\{2\} \subset \{2,4,5\}$ mais $\{2\} \notin \{2,4,5\}$.

Le résultat suivant, élémentaire, est très utile en pratique.

PROPOSITION 8 (Principe de double-inclusion)
Soient E et F deux ensembles. On a $E = F$ si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.

MÉTHODE 9 — *Pour prouver l'égalité de deux ensembles E et F,*

- *soit on raisonne par équivalence en montrant la propriété :*

$$\forall x,\ (x \in E \Leftrightarrow x \in F)$$

- *soit, et c'est le plus courant, on utilise le principe de double-inclusion en montrant les deux propriétés :*

$$\forall x \in E,\ x \in F \quad \text{et} \quad \forall x \in F,\ x \in E.$$

Illustrons cette méthode sur deux exemples, l'un utilisant un raisonnement par équivalence, l'autre le principe de double inclusion.

EXERCICE 10 —

- *Montrer que $\{z \in \mathbb{C}^* \mid \overline{z} = z^2\} = \{1, j, j^2\}$, où $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$.*

  Preuve — *Raisonnons par équivalence. Posons $A = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \overline{z} = z^2\}$*
  Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = re^{i\theta}$.
  Ainsi, $z \in A$ si et seulement si $\overline{z} = z^2$, soit encore si et seulement si $re^{-i\theta} = r^2e^{2i\theta}$, et r étant non nul, si et seulement si $re^{3i\theta} = 1$.
  Or $re^{3i\theta} = 1$ si et seulement si $r = 1$ et $3\theta \equiv 0\ [2\pi]$ soit encore, $r = 1$ et $\theta \equiv 0\ [2\pi/3]$.
  Donc $z \in A$ si et seulement si $z \in \{1, j, j^2\}$.
  D'où $\{z \in \mathbb{C}^* \mid \overline{z} = z^2\} = \{1, j, j^2\}$. □

- *Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$.*
  Montrer que

$$[a, b] = \{(1-t)a + tb \mid t \in [0,1]\}.$$

  Preuve — *On exclut le cas trivial où $a = b$ et donc $[a,b] = \{a\}$, et on suppose dans la suite que $a \neq b$.*
  Raisonnons par double-inclusion.
  $\triangleright$ Soit $x \in [a,b]$. Posons $t_0 = \dfrac{x-a}{b-a}$, bien défini car $b - a \neq 0$, de sorte que $x = (1-t_0)a + bt_0$. Comme $a \leq x \leq b$, on a $0 \leq x - a \leq b - a$ et donc, $b - a$ étant strictement positif, $0 \leq \dfrac{x-a}{b-a} \leq 1$, soit encore $0 \leq t_0 \leq 1$. Donc $x = (1-t_0)a + t_0 b \in \{(1-t)a + tb \mid t \in [0,1]\}$.
  D'où l'inclusion $[a,b] \subset \{(1-t)a + tb \mid t \in [0,1]\}$.
  $\triangleleft$ Réciproquement, soit $x \in \{(1-t)a + tb \mid t \in [0,1]\}$. Il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $x = (1-t_0)a + t_0 b$.
  On a $0 \leq t_0 \leq 1$ et donc $0 \leq 1 - t_0 \leq 1$. De l'inégalité $a \leq b$ et par positivité de t_0 et de $1 - t_0$, on a $t_0 a \leq t_0 b$ et $(1-t_0)a \leq (1-t_0)b$. On obtient donc $(1-t_0)a + t_0 a \leq (1-t_0)a + t_0 b \leq (1-t_0)b + t_0 b$, soit après simplification $a \leq x \leq b$. Donc $x \in [a,b]$.
  D'où la seconde inclusion $\{(1-t)a + tb, t \in [0,1]\} \subset [a,b]$.
  De ces deux points, il vient $[a,b] = \{(1-t)a + tb \mid t \in [0,1]\}$. □

1.2 Ensemble des parties d'un ensemble

Dans cette partie, après avoir introduit l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble, nous étudions différentes opérations dans $\mathcal{P}(E)$ et leurs propriétés.

Dans toute cette partie, E désigne un ensemble et A, B et C désignent des parties (ou sous-ensembles) de E.

1.2.1 Définition

DÉFINITION 11
On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties \幂集\ de E : $\mathcal{P}(E) = \{A \mid A \subset E\}$.

$\mathcal{P}(E)$ est donc l'ensemble dont les éléments sont les sous-ensembles de E : $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$. Ainsi, une partie A de E est à la fois un sous-ensemble de E ($A \subset E$) et un élément de $\mathcal{P}(E)$ ($A \in \mathcal{P}(E)$).

EXEMPLES 12

- *Considérons l'ensemble $E = \{0, 1\}$. Les parties de E sont celles à 0 élément, $\emptyset$, celles à un élément, $\{0\}$ et $\{1\}$, et celles à deux éléments, $E = \{0, 1\}$.*
  Donc $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.
- *Si $E = \emptyset$ alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$ et donc $\mathcal{P}(E)$ n'est pas vide.*
- *On a $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ et $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.*
- *On a $\pi \in \mathbb{R}$, $\{\pi\} \subset \mathbb{R}$ et $\{\pi\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.*

REMARQUE 13 — *Puisque que $E \subset E$ et $\emptyset \subset E$, on a $E \in \mathcal{P}(E)$ et $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$. Ainsi, $\mathcal{P}(E)$ n'est jamais vide.*

1.2.2 Union et intersection de deux parties

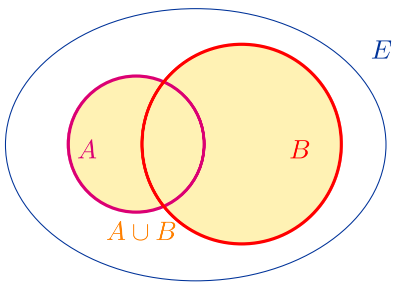
DÉFINITION 14 (Union, intersection)

- *On appelle **union** \并集\ de A et B, notée $A \cup B$ (se lit « A union B »), l'ensemble des éléments de E appartenant soit à A, soit à B :*

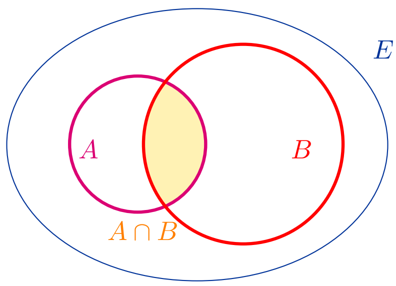
$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

- *On appelle **intersection** \交集\ de A et B, notée $A \cap B$ (se lit « A inter B »), l'ensemble des éléments de E appartenant à la fois à A et à B :*

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$



Union



Intersection

PROPOSITION 15

- *L'union $A \cup B$ vérifie :*
  - *$A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$.*
  - *Si $A \subset C$ et $B \subset C$ alors $A \cup B \subset C$.*

  On dit que $A \cup B$ est le plus petit ensemble au sens de l'inclusion qui contient A et B.
- *L'intersection $A \cap B$ vérifie :*
  - *$A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$.*
  - *Si $C \subset A$ et $C \subset B$ alors $C \subset A \cap B$.*

  On dit que $A \cap B$ est le plus grand ensemble au sens de l'inclusion qui est inclus dans A et dans B.

Preuve — Démontrons le premier point.

– Les propriétés $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$ sont évidentes car, par exemple, si x appartient à A alors il appartient à A ou à B (puisqu'il appartient à A !), et donc à $A \cup B$.

– Supposons que $A \subset C$ et $B \subset C$. Soit $x \in A \cup B$. Montrons que $A \cup B \subset C$.

Par définition de l'union, $x \in A$ ou $x \in B$.

1er cas : $x \in A$. Alors $x \in C$ car par hypothèse $A \subset C$.

2nd cas : $x \in B$. Alors $x \in C$ car par hypothèse $B \subset C$.

Donc dans tous les cas, $x \in C$.

Donc $A \cup B \subset C$.

□

Remarque 16 — *On en déduit facilement les inclusions et égalités suivantes.*

- $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ *et* $A \cap B \subset B \subset A \cup B$.
- $A \cup \emptyset = A$ *et* $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup E = E$ *et* $A \cap E = A$.
- *Si* $A \subset B$ *alors* $A \cup B = B$ *et* $A \cap B = A$.

Définition 17
On dit que A *et* B *sont* ***disjoints*** *si* $A \cap B = \emptyset$.

L'union $A \cup B$ *est alors souvent notée* $A \sqcup B$.

Deux ensembles sont disjoints si et seulement s'ils n'ont aucun élément en commun. Attention, deux ensembles peuvent être distincts (c'est-à-dire qu'ils ne sont pas égaux) mais non disjoints : $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{3, 4, 5\}$ sont distincts car ils n'ont pas les mêmes éléments mais ils ne sont pas disjoints car 2 appartient à A et à B.

Les propositions 18 et 19 découlent directement des propriétés usuelles des connecteurs logiques « et » et « ou ». Elles se visualisent facilement sur des dessins.

Proposition 18 (Commutativité \交换律\, associativité \结合律\)

- $\cup$ *et* $\cap$ *sont* ***commutatives*** *:* $A \cup B = B \cup A$ *et* $A \cap B = B \cap A$.
- $\cup$ *et* $\cap$ *sont* ***associatives*** *:* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *et* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Preuve — Traitons, par exemple, la première égalité du deuxième point, découlant de l'associativité de l'opération logique "ou" $\vee$. Les autres se démontrent en suivant le même modèle.

Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \cup C \Leftrightarrow\ & x \in (A \cup B) \text{ ou } x \in C \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ ou } x \in C \\ & \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ ou } x \in C) \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B \cup C \\ & \Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C). \end{aligned}$$

Donc $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. □

Proposition 19 (Distributivité \分配率\)

- *L'union est distributive sur l'intersection :*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

- *L'intersection est distributive sur l'union :*

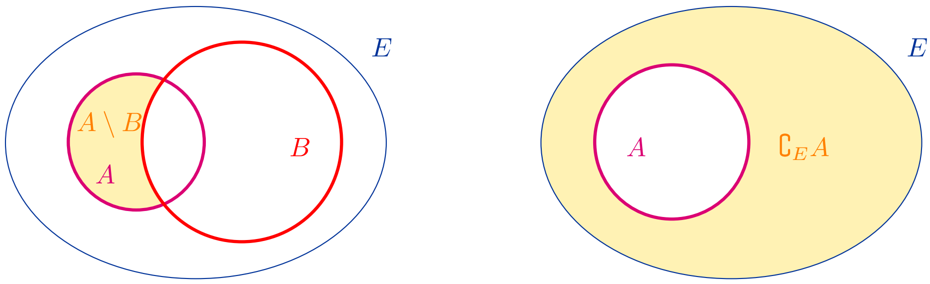
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Preuve — La première égalité découle de l'équivalence des propositions $p \vee (q \wedge r)$ et $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$. La seconde égalité découle de l'équivalence des propositions $p \wedge (q \vee r)$ et $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$. □

1.2.3 Différence de deux parties et complémentaire

Définition 20

- *On appelle* ***différence*** $A \setminus B$ *(se lit « A privé de B » ou « A moins B ») l'ensemble des éléments de A n'appartenant pas à B :*
$$A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$
- *On appelle* ***complémentaire*** \补集\ *de A dans E, noté* $\complement_E A$*, la différence* $E \setminus A$ *:*
$$\complement_E A = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$



Différence Complémentaire

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble E considéré, on peut noter plus simplement $\complement A$ ou $\overline{A}$ (se lit « A barre »).

Exemples 21

- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $[0, 2] \setminus [1, 3] = [0, 1[$.
- $\complement_{[0,1]} \left[0, \frac{1}{2}\right] = \left]\frac{1}{2}, 1\right]$.

Les propriétés suivantes découlent à nouveau des propriétés des opérateurs logiques. Elles se visualisent facilement sur des dessins.

Proposition 22 (Propriétés du complémentaire)

- $\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$.
- $\complement_E(A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$.

Preuve —

Prouvons la première égalité, la deuxième se démontrant se façon analogue .

Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in \complement_E(A \cup B) &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow \neg(x \in A \cup B) \Leftrightarrow \neg(x \in A \text{ ou } x \in B) \\ &\Leftrightarrow \big(\neg(x \in A)\big) \text{ et } \big(\neg(x \in B)\big) \\ &\Leftrightarrow (x \notin A) \text{ et } (x \notin B) \Leftrightarrow x \in \complement_E A \text{ et } x \in \complement_E B \\ &\Leftrightarrow x \in \complement_E A \cap \complement_E B \end{aligned}$$

Donc $\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$.

□

La proposition suivante donne une caractérisation du complémentaire.

Proposition 23

Si $A \cup B = E$ *et* $A \cap B = \emptyset$ *alors* $\complement_E A = B$.

Preuve — Supposons que $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$.

Soit $x \in B$. Comme A et B sont disjoints, $x \notin A$ donc $x \in \complement_E A$. Donc $B \subset \complement_E A$.

Soit $x \in \complement_E A$. Comme $A \cup B = E$ et $x \notin A$, $x \in B$. Donc $\complement A \subset B$.

D'où le résultat.

□

Exemple 24 — *On déduit facilement les égalités suivantes :* $\complement_E E = \emptyset$, $\complement_E \emptyset = E$, $\complement_E \complement_E A = A$.

1.2.4 Généralisation à une famille de parties

Soit I un ensemble non vide, dont les éléments sont appelés les **indices**. Pour chaque $i \in I$, on considère A_i une partie de l'ensemble E. On dit que les ensembles A_i forment une **famille** \族\ **de parties de** E, indicée par I, et notée $(A_i)_{i\in I}$.

Dans ce paragraphe, I désigne un ensemble non vide.

Les définitions et propriétés des parties précédentes se généralisent à des familles d'ensembles.

Définition 25
Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E.

- *On appelle **union** de la famille $(A_i)_{i\in I}$ l'ensemble*
$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, x \in A_i\}.$$
C'est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent au moins à l'un des A_i.
- *On appelle **intersection** de la famille $(A_i)_{i\in I}$ l'ensemble*
$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\}.$$
C'est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à tous les A_i.

Proposition 26
Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E et B une partie de E.

- $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I} (A_i \cap B)$
- $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i\in I} (A_i \cup B)$
- $\complement_E \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap (\complement_E A_i)$.
- $\complement_E \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup (\complement_E A_i)$.

Définition 27
Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E.

*On dit que les ensembles A_i sont **disjoints deux à deux** si pour tout i et tout j éléments distincts de I ($i \neq j$), $A_i \cap A_j = \emptyset$.*

L'union $\bigcup_{i\in I} A_i$ est alors notée $\bigsqcup_{i\in I} A_i$.

Définition 28
Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E
*On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ forme une **partition** \划分\ de E si*

1. *pour tout $i \in I$, A_i est non vide : $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$,*
2. *les A_i sont deux à deux disjoints : $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$,*
3. $\bigcup_{i\in I} A_i = E$.