北航中法工程师学院
Centrale Pékin

Algèbre 1

École Centrale de Pékin

Cours de mathématiques du cycle préparatoire

31 août 2020

Chapitre 1 Ensembles

Table des matières du chapitre

1.1 Premières définitions et notations

Dans cette première partie, nous revenons sur les notions d'ensemble, d'élément, d'appartenance et d'inclusion.

Définition 1

- *Un* ***ensemble*** *E est une collection d'objets, appelés* ***éléments*** *de E.*
- *On dit que x* ***appartient*** *à E si x est un élément de l'ensemble E, et on note $x \in E$.*
- *Deux ensembles E et F sont* ***égaux*** *s'ils ont les mêmes éléments : $\forall x, (x \in E \Leftrightarrow x \in F)$.*
  On note $E = F$.

On privilégie les lettres capitales (E, X, A, ...) pour désigner les ensembles et les lettres minuscules (a, b, x, ...) pour désigner leurs éléments.

Un ensemble n'est pas forcément un ensemble de nombres. Si E est l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ alors x désigne un nombre réel, mais si E est l'ensemble des suites réelles, alors x désigne une suite réelle ou si E est l'ensemble des droites du plan, alors x désigne une droite du plan.

Il existe plusieurs façons de décrire un ensemble.

- On peut donner la liste de tous les éléments de l'ensemble E entre accolades $\{\ \}$, les éléments étant séparés par des virgules. Soit on explicite tous les éléments de E, par exemple $E = \{a, b, c, d\}$, soit on en écrit seulement quelques-uns suivis de points de suspension, par exemple $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
  L'ordre des éléments n'a aucune importance : les ensembles $\{a, b\}$ et $\{b, a\}$ sont égaux. De plus, un élément ne peut pas appartenir plusieurs fois à un ensemble et s'il apparait plusieurs fois dans la liste, il s'agit en fait du même élément : les ensembles $\{a, b, a\}$ et $\{a, b\}$ sont égaux car ils ont les mêmes éléments. Par convention, chaque élément est généralement énuméré une seule fois.
- On peut définir un ensemble F par une propriété $\mathcal{P}$ qui caractérise les éléments de F parmi les éléments d'un ensemble connu E : $F = \{x \in E \mid \mathcal{P}(x)\}$. On dit que F est l'ensemble des éléments x de E tels que x vérifie la propriété $\mathcal{P}$.
  Cas particulier : Si F est un sous-ensemble de E et f est une application[1] de E dans F, alors l'ensemble $\{y \in F \mid \exists\, x \in E,\ y = f(x)\}$ se note plus simplement $\{f(x),\ x \in E\}$ en remplaçant $f(x)$ par son expression. On dit que c'est l'ensemble des $f(x)$ lorsque x parcourt E.
  Par exemple, $\{x^2,\ x \in \mathbb{N}\} = \{0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots\}$.

1. La notion d'application sera introduite dans le chapitre 2. Intuitivement, une application de E dans F associe à chaque élément de E un élément de F.

Exemples 2

- *L'ensemble E des entiers naturels n tels que n est inférieur ou égal à 4 peut s'écrire*

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 4\} \textit{ ou } E = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

- *Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble E des entiers naturels m tels que $1 \leq m \leq n$ peut s'écrire*

$$E = \{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leq m \leq n\} \textit{ ou } E = \{1, \ldots, n\}.$$

  On utilise également la notation $[\![1, n]\!]$ pour désigner cet ensemble.
  Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq p$, les notations $\{n, \ldots, p\}$ ou $[\![n, p]\!]$ désignent l'ensemble des entiers naturels compris entre n et p.

- *L'ensemble P des entiers naturels pairs peut s'écrire*

$$P = \{p \in \mathbb{N} \mid p \textit{ est pair }\} \textit{ ou } P = \{2k,\ k \in \mathbb{N}\},$$

  Cet ensemble est encore noté parfois $2\mathbb{N}$.

- *L'ensemble des nombres réels x tels que $0 \leq x \leq 1$ peut s'écrire*

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}.$$

  Il s'agit de l'intervalle noté $[0, 1]$.
  Plus généralement, pour tout a et tout b éléments de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ est l'intervalle noté $[a, b]$.

Définition 3

- *On appelle **ensemble vide** \空集\, noté $\emptyset$, l'ensemble ne contenant aucun élément.*
- *Un ensemble constitué d'un unique élément x est appelé un **singleton** \单元集\. Il est donc de la forme $\{x\}$.*
- *Un ensemble constitué de deux éléments distincts a et b est appelé une **paire** \二元集合\. Il est donc de la forme $\{a, b\}$.*

Remarque 4 — *On a bien sûr $\{a, b\} = \{b, a\}$.*

Définition 5
Soient E et F deux ensembles.

- *On dit que E est **inclus** \包含\ dans F si tout élément de E est un élément de F :*

$$\forall x,\ (x \in E \Rightarrow x \in F) \textit{ ou encore } \forall x \in E,\ x \in F.$$

  *On note $E \subset F$. On dit aussi que E est une **partie** (ou un sous-ensemble) de F.*
- *On dit que E est **strictement inclus** dans F si $E \subset F$ et $E \neq F$.*

Méthode 6 — *Ainsi, pour démontrer que E est inclus F, on commence par se donner un élément quelconque x de E en écrivant « Soit $x \in E$. » Il s'agit ensuite de montrer que x est un élément de F.*

Exemples 7

- *Tout ensemble E est inclus dans lui-même : $E \subset E$.*
- *L'ensemble vide est inclus dans tout ensemble E : $\emptyset \subset E$.*
- *L'ensemble $\{a, c\}$ est strictement inclus dans l'ensemble $\{a, b, c\}$: $\{a, c\} \subset \{a, b, c\}$.*
- *$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, les inclusions étant strictes.*
- $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.
- $\{2p \mid p \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$.

Il ne faut pas confondre l'appartenance et l'inclusion : on a $2 \in \{2,4,5\}$ mais $2 \not\subset \{2,4,5\}$, et $\{2\} \subset \{2,4,5\}$ mais $\{2\} \notin \{2,4,5\}$.

Le résultat suivant, élémentaire, est très utile en pratique.

PROPOSITION 8 (Principe de double-inclusion)
Soient E et F deux ensembles. On a $E = F$ si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.

MÉTHODE 9 — *Pour prouver l'égalité de deux ensembles E et F,*

- *soit on raisonne par équivalence en montrant la propriété :*

$$\forall x,\ (x \in E \Leftrightarrow x \in F)$$

- *soit, et c'est le plus courant, on utilise le principe de double-inclusion en montrant les deux propriétés :*

$$\forall x \in E,\ x \in F \qquad \text{et} \qquad \forall x \in F,\ x \in E.$$

Illustrons cette méthode sur deux exemples, l'un utilisant un raisonnement par équivalence, l'autre le principe de double inclusion.

EXERCICE 10 —

- *Montrer que $\{z \in \mathbb{C}^* \mid \overline{z} = z^2\} = \{1, j, j^2\}$, où $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$.*

  Preuve — *Raisonnons par équivalence. Posons $A = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \overline{z} = z^2\}$*
  Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = re^{i\theta}$.
  Ainsi, $z \in A$ si et seulement si $\overline{z} = z^2$, soit encore si et seulement si $re^{-i\theta} = r^2e^{2i\theta}$, et r étant non nul, si et seulement si $re^{3i\theta} = 1$.
  Or $re^{3i\theta} = 1$ si et seulement si $r = 1$ et $3\theta \equiv 0\ [2\pi]$ soit encore, $r = 1$ et $\theta \equiv 0\ [2\pi/3]$.
  Donc $z \in A$ si et seulement si $z \in \{1, j, j^2\}$.
  D'où $\{z \in \mathbb{C}^* \mid \overline{z} = z^2\} = \{1, j, j^2\}$. □

- *Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$.*
  Montrer que
  $$[a, b] = \{(1-t)a + tb \mid t \in [0, 1]\}.$$

  Preuve — *On exclut le cas trivial où $a = b$ et donc $[a, b] = \{a\}$, et on suppose dans la suite que $a \neq b$.*
  Raisonnons par double-inclusion.
  ▷ Soit $x \in [a, b]$. Posons $t_0 = \dfrac{x-a}{b-a}$, bien défini car $b - a \neq 0$, de sorte que $x = (1-t_0)a + bt_0$. Comme $a \leq x \leq b$, on a $0 \leq x - a \leq b - a$ et donc, $b - a$ étant strictement positif, $0 \leq \dfrac{x-a}{b-a} \leq 1$, soit encore $0 \leq t_0 \leq 1$. Donc $x = (1-t_0)a + t_0b \in \{(1-t)a + tb \mid t \in [0, 1]\}$.
  D'où l'inclusion $[a, b] \subset \{(1-t)a + tb \mid t \in [0, 1]\}$.
  ◁ Réciproquement, soit $x \in \{(1-t)a + tb \mid t \in [0, 1]\}$. Il existe $t_0 \in [0, 1]$ tel que $x = (1-t_0)a + t_0b$.
  On a $0 \leq t_0 \leq 1$ et donc $0 \leq 1 - t_0 \leq 1$. De l'inégalité $a \leq b$ et par positivité de t_0 et de $1 - t_0$, on a $t_0a \leq t_0b$ et $(1-t_0)a \leq (1-t_0)b$. On obtient donc $(1-t_0)a + t_0a \leq (1-t_0)a + t_0b \leq (1-t_0)b + t_0b$, soit après simplification $a \leq x \leq b$. Donc $x \in [a, b]$.
  D'où la seconde inclusion $\{(1-t)a + tb, t \in [0, 1]\} \subset [a, b]$.
  De ces deux points, il vient $[a, b] = \{(1-t)a + tb \mid t \in [0, 1]\}$. □

1.2 ENSEMBLE DES PARTIES D'UN ENSEMBLE

Dans cette partie, après avoir introduit l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble, nous étudions différentes opérations dans $\mathcal{P}(E)$ et leurs propriétés.

Dans toute cette partie, E désigne un ensemble et A, B et C désignent des parties (ou sous-ensembles) de E.