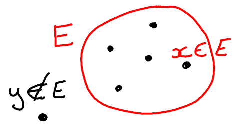
ALG 1

Chap 1 : Les ensembles

Cours 1



$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$\{a, b, a\}$ $\quad$ a $\quad$ b

$= \{a, b\}$

$\{\underbrace{x^2}_{f(x)}, x \in \mathbb{N}\} = \{\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{0^2}, 1^2, 2^2, 3^2, \dots\}$

$f : x \mapsto x^2$

$= \{0, 1, 4, 9, \dots\}$

$x = 0$
$x = 1$
$x = 2$
$\vdots$

p est pair s'il est divisible par 2 :
il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k$.

$P = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ est pair}\}$

$= \{p \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N},\ p = 2k\}$

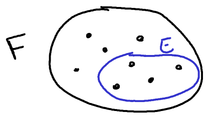
$= \{2k,\ k \in \mathbb{N}\} = \{2 \times 0 = 0,\ 2 \times 1 = 2,\ 2 \times 2 = 4,\ \dots\}$.

$= 2\mathbb{N}$

ALG 1 — Chap 1 : Les ensembles — Cours 2

I. Premières définitions et notations

Si $a=b$ alors $\{a,b\}=\{a,a\}=\{a\}$ est un singleton.



$E \subset F$.

si $x \in E$ alors $x \in F$.

$a < b$: $a \leq b$ et $a \neq b$.

$E \subsetneq F$: $E \subset F$ et $E \neq F$

Montre que $E \subset (F =) E$

Soit $x \in E$.

Donc $x \in (F =) E$ D'où $E \subset F$

$E = F$

- Soit E un ensemble. Montrons que $\emptyset \subset E$.

  Supposons que $\emptyset \not\subset E$.

  Alors il existe $x \in \emptyset$ tel que $x \notin E$.

  ABSURDE !

  Donc $\emptyset \subset E$.

- Soit $x \in \{a,c\}$. Montrons que $x \in \{a,b,c\}$.

  1^{e} cas : $x = a$. Alors $x \in \{\underline{a}, b, c\}$

  2^{nd} cas : $x = c$. Alors $x \in \{a, b, \underline{c}\}$

  Donc $x \in \{a,b,c\}$. D'où $\{a,c\} \subset \{a,b,c\}$.

- $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 0 \leq x \leq 1\} \subset \mathbb{R}$

- $\{2p,\ p \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$.

Chap 1 : Les ensembles

I. Premières définitions et notations

Si $E = F$,

si $x \in E$ alors $x \in F (= E)$: $E \subset F$
si $x \in F$ alors $x \in E (= F)$: $F \subset E$

Si $E \subset F$ et $F \subset E$

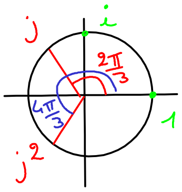
$(\underbrace{x \in E}_{P} \Rightarrow \underbrace{x \in F}_{Q})$ et $(\underbrace{x \in F}_{Q} \Rightarrow \underbrace{x \in E}_{P})$: $P \Leftrightarrow Q$

$P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$

Donc $x \in E \Leftrightarrow x \in F$

$\square$

Rappel $\bar{z}$: conjugué de z : si $z = a + ib$, alors $\bar{z} = a - ib$.



$j = e^{2i\pi/3}$, $j^2 = e^{2 \times \frac{2i\pi}{3}} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$

Racines $3^{\text{ème}}$ de l'unité : $1, j, j^2$

$z^3 = 1$.

A

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

Il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = re^{i\theta}$.

Rappel : $z = a + ib$
$z = re^{i\theta}$,
où $r \in \mathbb{R}_+^*$,
$\theta \in \mathbb{R}$.

$(e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta)$

<u>$z \in A$</u> ssi $\bar{z} = z^2$

ssi $\overline{re^{i\theta}} = (re^{i\theta})^2$

ssi $re^{-i\theta} = r^2 e^{2i\theta}$

ssi $1 = re^{3i\theta}$ (car $r \neq 0$)

ssi $r = 1$ et $3\theta \equiv 0\ [2\pi]$

ssi $r = 1$ et $\theta \equiv 0\ [\frac{2\pi}{3}]$

ssi $r = 1$ et $\theta \in \{\frac{2\pi}{3} \times k,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$(z = re^{i\theta})$ ssi $z \in \left\{ 1 e^{i \frac{2\pi}{3} \times k},\ k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{3}},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$= \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{3}},\ k \in \{0,1,2\} \right\}$$

$$= \{1, j, j^2\}$$

$\boxed{\text{ALG 1}}$ Chap 1 : Les ensembles — Cours 4

I. Premières définitions et notations

Supposons que $a \neq b$.

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.

- Montrons que $[a,b] \subset \{(1-t)a + bt,\ t \in [0;1]\}$.

Soit $x \in [a,b]$.

Posons $t = \dfrac{x-a}{b-a}$ $(b-a \neq 0)$.

Alors $x = (1-t)a + tb$.

On a $a \leq x \leq b$

donc $0 \leq x - a \leq b - a$

donc $0 \leq \dfrac{x-a}{b-a} \leq 1$ (t)

car $b - a > 0$.

Donc $t \in [0,1]$.

Donc $x \in \{(1-t)a + bt,\ t \in [0,1]\}$.

$x = (1-t)a + tb$

$x = a + t(b-a)$

$t = \dfrac{x-a}{b-a}$ si $b - a \neq 0$

- Réciproquement, montrons que $\{(1-t)a + bt,\ t \in [0,1]\} \subset [a,b]$.

Soit $x \in \{(1-t)a + bt,\ t \in [0,1]\}$.

Il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $x = (1-t_0)a + bt_0$.

On a $a \leq b$ et $t_0 \geq 0$ donc $t_0 a \leq t_0 b$

donc $a = (1-t_0)a + at_0 \leq (1-t_0)a + bt_0$.

Comme $1 - t_0 \geq 0$ (car $t_0 \leq 1$), $(1-t_0)a \leq (1-t_0)b$

donc $(1-t_0)a + bt_0 \leq (1-t_0)b + bt_0 = b$

Donc $a \le \underbrace{(1-t_0)a+bt_0}_{x} \le b$

Donc $x \in [a,b]$. Donc $\{(1-t)a+bt,\ t\in[0,1]\} \subset [a,b]$.

• Donc $[a,b]=\{(1-t)a+bt,\ t\in[0,1]\}$ pour $a\neq b$

Si $a=b$, $[a,b]=\{a\}=\{\underbrace{(1-t)a+ta}_{=a},\ t\in[0,1]\}$