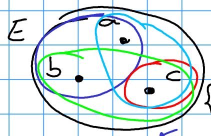
$\boxed{\text{ALG 1}}$ **Chap 1 : Les ensembles** Cours 2 (1)

1-2. Ensemble des parties d'un ensemble

1.2.1. Définition :

partie = sous-ensemble.



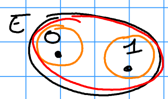
$\{a,b\} \subset E$, $\{c\} \subset E$, $\{b,c\} \subset E$

$\{a,b,c\} = E \subset E$, $\emptyset \subset E$

$\mathcal{P}(E) = \{ \underbrace{\overset{\subset E}{\emptyset}}_{0 \text{ élmt}}, \underbrace{\overset{\subset E}{\{a\}}, \overset{\subset E}{\{b\}}, \{c\}}_{1 \text{ élmt}}, \underbrace{\{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}}_{2 \text{ éléments}}, \underbrace{\overset{\subset E}{\{a,b,c\}}}_{3 \text{ éléments}} \}$ 8 éléments $= 2^3$

$\{a\} \subset E$, $a \not\subset E$, $a \in E$

$\{a,b\} \underline{\underline{\in}} \mathcal{P}(E)$, $\{a,b\} \subset E$

Ex 12 . • 

0 élmt : $\emptyset \subset E$

1 élmt : $\{0\}, \{1\} \subset E$

2 élmts : $\{0,1\} \subset E$

$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$. 4 élmts dans $\mathcal{P}(E)$ $= 2^2$

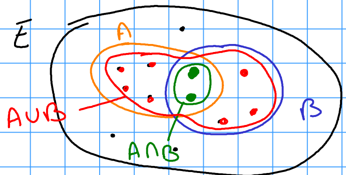
Si E a n éléments alors $\mathcal{P}(E)$ a 2^n éléments.

• $\emptyset \subset \emptyset$ $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$, $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$\boxed{\text{ALG 1}}$ **Chap 1 : Les ensembles** Cours 2 (2)

1-2. Ensemble des parties d'un ensemble

1.2.2. Union et intersection de 2 parties.



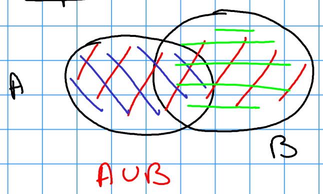
$A \in \mathcal{P}(E)$
$B \in \mathcal{P}(E)$

$A \cup B \in \mathcal{P}(E)$
$= \{x \in E, x \in A \underbrace{\text{ ou }}_{} x \in B\}$

inclusif ≠ exclusif

$A \cap B \in \mathcal{P}(E)$
$= \{x \in E, x \in A \text{ \underline{et} } x \in B\}$

Prop 15.



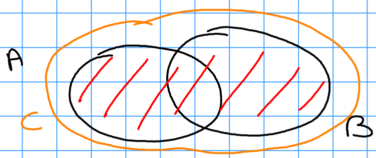
Dém.

- Soit $x \in A$. Alors $x \in A$ ou $x \in B$.

  Donc $x \in A \cup B$.

- $B \subset A \cup B$

- Si $A \subset C$ et $B \subset C$ alors $A \cup B \subset C$



Dém. Supposons $A \subset C$ et $B \subset C$.

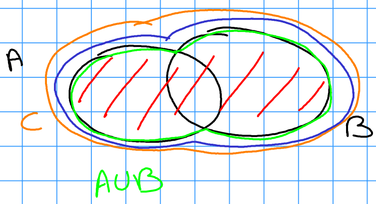
Montrons que $A \cup B \subset C$.

Soit $x \in A \cup B$. Alors $x \in A$ ou $x \in B$.

→ 1e cas : $x \in A$ alors comme $A \subset C$, $x \in C$.

→ 2nd cas : $x \in B$ alors comme $B \subset C$, $x \in C$.

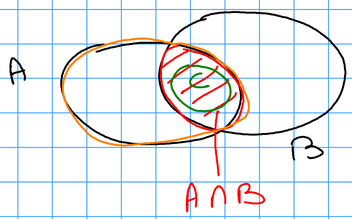
Dans tous les cas, $x \in C$. Donc $A \cup B \subset C$.



$A \cup B$ contient A et contient B.

$A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$.

Si C est un ensemble qui contient A et qui contient B, alors il contient $A \cup B$.



- $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$.

Dém. Soit $x \in A \cap B$.

Alors $x \in A$ et $x \in B$.

Donc $x \in \begin{array}{|l} A \\ B \end{array}$. Donc $A \cap B \subset \begin{array}{|l} A \\ B \end{array}$.

Si $C \subset A$ et $C \subset B$ alors $C \subset A \cap B$.

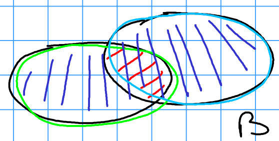
Dém. Supposons $C \subset A$ et $C \subset B$.

Montrons que $C \subset A \cap B$.

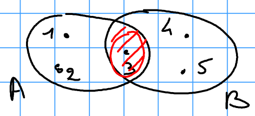
Soit $x \in C$. Comme $C \subset \begin{array}{|l} A, \\ B, \end{array}$ $\begin{array}{l} x \in A. \\ x \in B \end{array}$ Donc $x \in A \cap B$

Donc $C \subset A \cap B$.

A



Déf 17.



A et B sont <u>distincts</u>

$A \cap B = \{3\} \neq \emptyset$

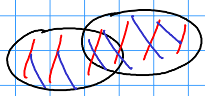
donc A et B ne sont pas <u>disjoints</u>.

Prop 18. • $x \in A \cup B$ ($\cap$) ssi $x \in A$ ou (et) $x \in B$

ssi $x \in B$ ou (et) $x \in A$

ssi $x \in B \cup A$ ($\cap$)

$p \vee q$ (ou) est équivalente à $q \vee p$



• $A, B \in \mathcal{P}(E)$

$$\left.\begin{array}{l} A \cup B \in \mathcal{P}(E) \\ C \in \mathcal{P}(E) \end{array}\right\} (A \cup B) \cup C$$

$$||$$

$$\left.\begin{array}{l} A \in \mathcal{P}(E) \\ B \cup C \in \mathcal{P}(E) \end{array}\right\} A \cup (B \cup C)$$

On pose alors $A \cup B \cup C$

$(p \vee q) \vee r$ est équivalente à $p \vee (q \vee r)$

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
F	F	F	F	F		F
F	F	V	F	V		V
F	V	F	V	V		V
F	V	V	V	V		V
V	F	F	V	V		V
V	F	V	V	V		V
V	V	F	V	V		V
V	V	V	V	V		V