北航中法工程师学院
Centrale Pékin

Algèbre 1

ÉCOLE CENTRALE DE PÉKIN

Cours de mathématiques du cycle préparatoire

20 septembre 2020

Chapitre 1 Ensembles

Table des matières du chapitre

1.1 Premières définitions et notations

Dans cette première partie, nous revenons sur les notions d'ensemble, d'élément, d'appartenance et d'inclusion.

Définition 1

- *Un* ***ensemble*** *E est une collection d'objets, appelés* ***éléments*** *de E.*
- *On dit que x* ***appartient*** *à E si x est un élément de l'ensemble E, et on note $x \in E$.*
- *Deux ensembles E et F sont* ***égaux*** *s'ils ont les mêmes éléments : $\forall x, (x \in E \Leftrightarrow x \in F)$.*
  On note $E = F$.

On privilégie les lettres capitales (E, X, A, ...) pour désigner les ensembles et les lettres minuscules (a, b, x, ...) pour désigner leurs éléments.

Un ensemble n'est pas forcément un ensemble de nombres. Si E est l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ alors x désigne un nombre réel, mais si E est l'ensemble des suites réelles, alors x désigne une suite réelle ou si E est l'ensemble des droites du plan, alors x désigne une droite du plan.

Il existe plusieurs façons de décrire un ensemble.

- On peut donner la liste de tous les éléments de l'ensemble E entre accolades $\{\ \}$, les éléments étant séparés par des virgules. Soit on explicite tous les éléments de E, par exemple $E = \{a, b, c, d\}$, soit on en écrit seulement quelques-uns suivis de points de suspension, par exemple $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
  L'ordre des éléments n'a aucune importance : les ensembles $\{a, b\}$ et $\{b, a\}$ sont égaux. De plus, un élément ne peut pas appartenir plusieurs fois à un ensemble et s'il apparait plusieurs fois dans la liste, il s'agit en fait du même élément : les ensembles $\{a, b, a\}$ et $\{a, b\}$ sont égaux car ils ont les mêmes éléments. Par convention, chaque élément est généralement énuméré une seule fois.
- On peut définir un ensemble F par une propriété $\mathcal{P}$ qui caractérise les éléments de F parmi les éléments d'un ensemble connu E : $F = \{x \in E \mid \mathcal{P}(x)\}$. On dit que F est l'ensemble des éléments x de E tels que x vérifie la propriété $\mathcal{P}$.
  Cas particulier : Si F est un sous-ensemble de E et f est une application[1] de E dans F, alors l'ensemble $\{y \in F \mid \exists\, x \in E,\ y = f(x)\}$ se note plus simplement $\{f(x),\ x \in E\}$ en remplaçant $f(x)$ par son expression. On dit que c'est l'ensemble des $f(x)$ lorsque x parcourt E.
  Par exemple, $\{x^2,\ x \in \mathbb{N}\} = \{0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots\}$.

1. La notion d'application sera introduite dans le chapitre 2. Intuitivement, une application de E dans F associe à chaque élément de E un élément de F.

Exemples 2

- *L'ensemble E des entiers naturels n tels que n est inférieur ou égal à 4 peut s'écrire*
$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 4\} \text{ ou } E = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$
- *Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble E des entiers naturels m tels que $1 \leq m \leq n$ peut s'écrire*
$$E = \{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leq m \leq n\} \text{ ou } E = \{1, \ldots, n\}.$$
On utilise également la notation $[\![1, n]\!]$ pour désigner cet ensemble.
Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq p$, les notations $\{n, \ldots, p\}$ ou $[\![n, p]\!]$ désignent l'ensemble des entiers naturels compris entre n et p.
- *L'ensemble P des entiers naturels pairs peut s'écrire*
$$P = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ est pair }\} \text{ ou } P = \{2k,\ k \in \mathbb{N}\},$$
Cet ensemble est encore noté parfois $2\mathbb{N}$.
- *L'ensemble des nombres réels x tels que $0 \leq x \leq 1$ peut s'écrire*
$$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}.$$
Il s'agit de l'intervalle noté $[0, 1]$.
Plus généralement, pour tout a et tout b éléments de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ est l'intervalle noté $[a, b]$.

Définition 3

- *On appelle **ensemble vide** \空集\, noté $\emptyset$, l'ensemble ne contenant aucun élément.*
- *Un ensemble constitué d'un unique élément x est appelé un **singleton** \单元集\. Il est donc de la forme $\{x\}$.*
- *Un ensemble constitué de deux éléments distincts a et b est appelé une **paire** \二元集合\. Il est donc de la forme $\{a, b\}$.*

Remarque 4 — *On a bien sûr $\{a, b\} = \{b, a\}$.*

Définition 5
Soient E et F deux ensembles.

- *On dit que E est **inclus** \包含\ dans F si tout élément de E est un élément de F :*
$$\forall x,\ (x \in E \Rightarrow x \in F) \text{ ou encore } \forall x \in E,\ x \in F.$$
*On note $E \subset F$. On dit aussi que E est une **partie** (ou un sous-ensemble) de F.*
- *On dit que E est **strictement inclus** dans F si $E \subset F$ et $E \neq F$.*

Méthode 6 — *Ainsi, pour démontrer que E est inclus F, on commence par se donner un élément quelconque x de E en écrivant « Soit $x \in E$. » Il s'agit ensuite de montrer que x est un élément de F.*

Exemples 7

- *Tout ensemble E est inclus dans lui-même : $E \subset E$.*
- *L'ensemble vide est inclus dans tout ensemble E : $\emptyset \subset E$.*
- *L'ensemble $\{a, c\}$ est strictement inclus dans l'ensemble $\{a, b, c\}$: $\{a, c\} \subset \{a, b, c\}$.*
- *$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, les inclusions étant strictes.*
- $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.
- $\{2p \mid p \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$.

Il ne faut pas confondre l'appartenance et l'inclusion : on a $2 \in \{2,4,5\}$ mais $2 \not\subset \{2,4,5\}$, et $\{2\} \subset \{2,4,5\}$ mais $\{2\} \notin \{2,4,5\}$.

Le résultat suivant, élémentaire, est très utile en pratique.

PROPOSITION 8 (Principe de double-inclusion)
Soient E et F deux ensembles. On a $E = F$ si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.

MÉTHODE 9 — *Pour prouver l'égalité de deux ensembles E et F,*

- *soit on raisonne par équivalence en montrant la propriété :*

$$\forall x,\ (x \in E \Leftrightarrow x \in F)$$

- *soit, et c'est le plus courant, on utilise le principe de double-inclusion en montrant les deux propriétés :*

$$\forall x \in E,\ x \in F \qquad \text{et} \qquad \forall x \in F,\ x \in E.$$

Illustrons cette méthode sur deux exemples, l'un utilisant un raisonnement par équivalence, l'autre le principe de double inclusion.

EXERCICE 10 —

- *Montrer que $\{z \in \mathbb{C}^* \mid \overline{z} = z^2\} = \{1, j, j^2\}$, où $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$.*
  Preuve — *Raisonnons par équivalence. Posons $A = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \overline{z} = z^2\}$*
  Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = re^{i\theta}$.
  Ainsi, $z \in A$ si et seulement si $\overline{z} = z^2$, soit encore si et seulement si $re^{-i\theta} = r^2e^{2i\theta}$, et r étant non nul, si et seulement si $re^{3i\theta} = 1$.
  Or $re^{3i\theta} = 1$ si et seulement si $r = 1$ et $3\theta \equiv 0\ [2\pi]$ soit encore, $r = 1$ et $\theta \equiv 0\ [2\pi/3]$.
  Donc $z \in A$ si et seulement si $z \in \{1, j, j^2\}$.
  D'où $\{z \in \mathbb{C}^* \mid \overline{z} = z^2\} = \{1, j, j^2\}$. □

- *Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$.*
  Montrer que
  $$[a,b] = \{(1-t)a + tb \mid t \in [0,1]\}.$$
  Preuve — *On exclut le cas trivial où $a = b$ et donc $[a,b] = \{a\}$, et on suppose dans la suite que $a \neq b$.*
  Raisonnons par double-inclusion.
  $\triangleright$ Soit $x \in [a,b]$. Posons $t_0 = \dfrac{x-a}{b-a}$, bien défini car $b - a \neq 0$, de sorte que $x = (1-t_0)a + bt_0$. Comme $a \leq x \leq b$, on a $0 \leq x - a \leq b - a$ et donc, $b - a$ étant strictement positif, $0 \leq \dfrac{x-a}{b-a} \leq 1$, soit encore $0 \leq t_0 \leq 1$. Donc $x = (1-t_0)a + t_0b \in \{(1-t)a + tb \mid t \in [0,1]\}$.
  D'où l'inclusion $[a,b] \subset \{(1-t)a + tb \mid t \in [0,1]\}$.
  $\triangleleft$ Réciproquement, soit $x \in \{(1-t)a + tb \mid t \in [0,1]\}$. Il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $x = (1-t_0)a + t_0b$.
  On a $0 \leq t_0 \leq 1$ et donc $0 \leq 1 - t_0 \leq 1$. De l'inégalité $a \leq b$ et par positivité de t_0 et de $1 - t_0$, on a $t_0a \leq t_0b$ et $(1-t_0)a \leq (1-t_0)b$. On obtient donc $(1-t_0)a + t_0a \leq (1-t_0)a + t_0b \leq (1-t_0)b + t_0b$, soit après simplification $a \leq x \leq b$. Donc $x \in [a,b]$.
  D'où la seconde inclusion $\{(1-t)a + tb, t \in [0,1]\} \subset [a,b]$.
  De ces deux points, il vient $[a,b] = \{(1-t)a + tb \mid t \in [0,1]\}$. □

1.2 ENSEMBLE DES PARTIES D'UN ENSEMBLE

Dans cette partie, après avoir introduit l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble, nous étudions différentes opérations dans $\mathcal{P}(E)$ et leurs propriétés.

Dans toute cette partie, E désigne un ensemble et A, B et C désignent des parties (ou sous-ensembles) de E.

1.2.1 Définition

DÉFINITION 11
On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties \幂集\ de E : $\mathcal{P}(E) = \{A \mid A \subset E\}$.

$\mathcal{P}(E)$ est donc l'ensemble dont les éléments sont les sous-ensembles de E : $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$. Ainsi, une partie A de E est à la fois un sous-ensemble de E ($A \subset E$) et un élément de $\mathcal{P}(E)$ ($A \in \mathcal{P}(E)$).

EXEMPLES 12

- *Considérons l'ensemble $E = \{0, 1\}$. Les parties de E sont celles à 0 élément, $\emptyset$, celles à un élément, $\{0\}$ et $\{1\}$, et celles à deux éléments, $E = \{0, 1\}$.*
  Donc $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.
- *Si $E = \emptyset$ alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$ et donc $\mathcal{P}(E)$ n'est pas vide.*
- *On a $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ et $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.*
- *On a $\pi \in \mathbb{R}$, $\{\pi\} \subset \mathbb{R}$ et $\{\pi\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.*

REMARQUE 13 — *Puisque que $E \subset E$ et $\emptyset \subset E$, on a $E \in \mathcal{P}(E)$ et $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$. Ainsi, $\mathcal{P}(E)$ n'est jamais vide.*

1.2.2 Union et intersection de deux parties

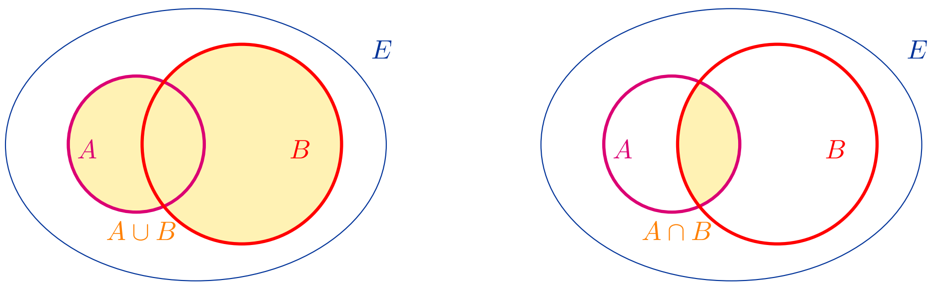
DÉFINITION 14 (Union, intersection)

- *On appelle **union** \并集\ de A et B, notée $A \cup B$ (se lit « A union B »), l'ensemble des éléments de E appartenant soit à A, soit à B :*

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

- *On appelle **intersection** \交集\ de A et B, notée $A \cap B$ (se lit « A inter B »), l'ensemble des éléments de E appartenant à la fois à A et à B :*

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$



Union
Intersection

PROPOSITION 15

- *L'union $A \cup B$ vérifie :*
  — *$A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$.*
  — *Si $A \subset C$ et $B \subset C$ alors $A \cup B \subset C$.*

  On dit que $A \cup B$ est le plus petit ensemble au sens de l'inclusion qui contient A et B.
- *L'intersection $A \cap B$ vérifie :*
  — *$A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$.*
  — *Si $C \subset A$ et $C \subset B$ alors $C \subset A \cap B$.*

  On dit que $A \cap B$ est le plus grand ensemble au sens de l'inclusion qui est inclus dans A et dans B.

Preuve — Démontrons le premier point.

– Les propriétés $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$ sont évidentes car, par exemple, si x appartient à A alors il appartient à A ou à B (puisqu'il appartient à A !), et donc à $A \cup B$.

– Supposons que $A \subset C$ et $B \subset C$. Soit $x \in A \cup B$. Montrons que $A \cup B \subset C$.

Par définition de l'union, $x \in A$ ou $x \in B$.

1er cas : $x \in A$. Alors $x \in C$ car par hypothèse $A \subset C$.

2nd cas : $x \in B$. Alors $x \in C$ car par hypothèse $B \subset C$.

Donc dans tous les cas, $x \in C$.

Donc $A \cup B \subset C$.

□

REMARQUE 16 — *On en déduit facilement les inclusions et égalités suivantes.*

- $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ *et* $A \cap B \subset B \subset A \cup B$.
- $A \cup \emptyset = A$ *et* $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup E = E$ *et* $A \cap E = A$.
- *Si* $A \subset B$ *alors* $A \cup B = B$ *et* $A \cap B = A$.

DÉFINITION 17
On dit que A *et* B *sont* ***disjoints*** *si* $A \cap B = \emptyset$.

L'union $A \cup B$ *est alors souvent notée* $A \sqcup B$.

Deux ensembles sont disjoints si et seulement s'ils n'ont aucun élément en commun. Attention, deux ensembles peuvent être distincts (c'est-à-dire qu'ils ne sont pas égaux) mais non disjoints : $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{3, 4, 5\}$ sont distincts car ils n'ont pas les mêmes éléments mais ils ne sont pas disjoints car 2 appartient à A et à B.

Les propositions 18 et 19 découlent directement des propriétés usuelles des connecteurs logiques « et » et « ou ». Elles se visualisent facilement sur des dessins.

PROPOSITION 18 (Commutativité \交换律\, associativité \结合律\)

- $\cup$ *et* $\cap$ *sont* ***commutatives*** *:* $A \cup B = B \cup A$ *et* $A \cap B = B \cap A$.
- $\cup$ *et* $\cap$ *sont* ***associatives*** *:* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *et* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Preuve — Traitons, par exemple, la première égalité du deuxième point, découlant de l'associativité de l'opération logique "ou" $\vee$. Les autres se démontrent en suivant le même modèle.

Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \cup C \Leftrightarrow\ & x \in (A \cup B) \text{ ou } x \in C \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ ou } x \in C \\ & \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ ou } x \in C) \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B \cup C \\ & \Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C). \end{aligned}$$

Donc $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. □

PROPOSITION 19 (Distributivité \分配率\)

- *L'union est distributive sur l'intersection :*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

- *L'intersection est distributive sur l'union :*

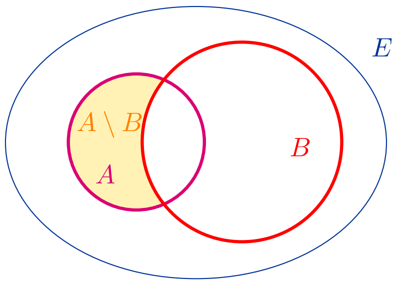
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Preuve — La première égalité découle de l'équivalence des propositions $p \vee (q \wedge r)$ et $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$. La seconde égalité découle de l'équivalence des propositions $p \wedge (q \vee r)$ et $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$. □

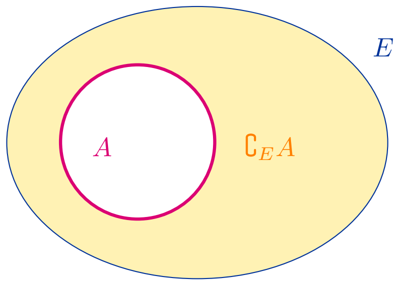
1.2.3 Différence de deux parties et complémentaire

Définition 20

- *On appelle* ***différence*** $A \setminus B$ *(se lit « A privé de B » ou « A moins B ») l'ensemble des éléments de A n'appartenant pas à B :*
$$A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$
- *On appelle* ***complémentaire*** \补集\ *de A dans E, noté* $\complement_E A$*, la différence* $E \setminus A$ *:*
$$\complement_E A = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$



Différence



Complémentaire

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble E considéré, on peut noter plus simplement $\complement A$ ou $\overline{A}$ (se lit « A barre »).

Exemples 21

- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $[0,2] \setminus [1,3] = [0,1[$.
- $\complement_{[0,1]} \left[0, \frac{1}{2}\right] = \left]\frac{1}{2}, 1\right]$.

Les propriétés suivantes découlent à nouveau des propriétés des opérateurs logiques. Elles se visualisent facilement sur des dessins.

Proposition 22 (Propriétés du complémentaire)

- $\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$.
- $\complement_E(A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$.

Preuve —

Prouvons la première égalité, la deuxième se démontrant se façon analogue .

Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in \complement_E(A \cup B) &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow \neg(x \in A \cup B) \Leftrightarrow \neg(x \in A \text{ ou } x \in B) \\ &\Leftrightarrow \big(\neg(x \in A)\big) \text{ et } \big(\neg(x \in B)\big) \\ &\Leftrightarrow (x \notin A) \text{ et } (x \notin B) \Leftrightarrow x \in \complement_E A \text{ et } x \in \complement_E B \\ &\Leftrightarrow x \in \complement_E A \cap \complement_E B \end{aligned}$$

Donc $\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$.

□

La proposition suivante donne une caractérisation du complémentaire.

Proposition 23

Si $A \cup B = E$ *et* $A \cap B = \emptyset$ *alors* $\complement_E A = B$.

Preuve — Supposons que $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$.

Soit $x \in B$. Comme A et B sont disjoints, $x \notin A$ donc $x \in \complement_E A$. Donc $B \subset \complement_E A$.

Soit $x \in \complement_E A$. Comme $A \cup B = E$ et $x \notin A$, $x \in B$. Donc $\complement A \subset B$.

D'où le résultat. □

EXEMPLE 24 — *On déduit facilement les égalités suivantes :* $\complement_E E = \emptyset$, $\complement_E \emptyset = E$, $\complement_E \complement_E A = A$.

1.2.4 Généralisation à une famille de parties

Soit I un ensemble non vide, dont les éléments sont appelés les **indices**. Pour chaque $i \in I$, on considère A_i une partie de l'ensemble E. On dit que les ensembles A_i forment une **famille** \族\ **de parties de** E, indicée par I, et notée $(A_i)_{i\in I}$.

Dans ce paragraphe, I désigne un ensemble non vide.

Les définitions et propriétés des parties précédentes se généralisent à des familles d'ensembles.

DÉFINITION 25
Soit $(A_i)_{i\in I}$ *une famille de parties de* E.

- *On appelle* ***union*** *de la famille* $(A_i)_{i\in I}$ *l'ensemble*
$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, x \in A_i\}.$$
C'est l'ensemble des éléments de E *qui appartiennent au moins à l'un des* A_i.
- *On appelle* ***intersection*** *de la famille* $(A_i)_{i\in I}$ *l'ensemble*
$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\}.$$
C'est l'ensemble des éléments de E *qui appartiennent à tous les* A_i.

PROPOSITION 26
Soit $(A_i)_{i\in I}$ *une famille de parties de* E *et* B *une partie de* E.

- $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I} (A_i \cap B)$
- $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i\in I} (A_i \cup B)$
- $\complement_E \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap (\complement_E A_i)$.
- $\complement_E \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup (\complement_E A_i)$.

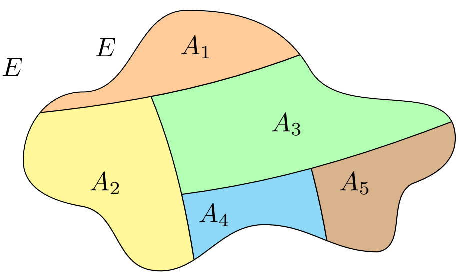
DÉFINITION 27
Soit $(A_i)_{i\in I}$ *une famille de parties de* E.

On dit que les ensembles A_i *sont* ***disjoints deux à deux*** *si pour tout* i *et tout* j *éléments distincts de* I $(i \neq j)$, $A_i \bigcap A_j = \emptyset$.

L'union $\bigcup_{i\in I} A_i$ *est alors notée* $\bigsqcup_{i\in I} A_i$.

DÉFINITION 28
Soit $(A_i)_{i\in I}$ *une famille de parties de* E
On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ *forme une* ***partition*** \划分\ *de* E *si*

1. *pour tout* $i \in I$, A_i *est non vide :* $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$,
2. *les* A_i *sont deux à deux disjoints :* $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$,
3. $\bigcup_{i\in I} A_i = E$.



Exemples 29

- *Notons* $P = \{2k, k \in \mathbb{N}\}$ *l'ensemble des nombres pairs et* $I = \{2k+1, k \in \mathbb{N}\}$ *l'ensemble des nombres impairs.* P *et* I *sont des ensembles non vides et disjoints. De plus,* $P \cup I = \mathbb{N}$.
  La famille $\{P, I\}$ *forme donc une partition de* $\mathbb{N}$.
- *La famille* $([n, n+1[)_{n \in \mathbb{Z}}$ *est une partition de* $\mathbb{R}$.

1.3 Produit cartésien d'ensembles

1.3.1 Couples et n-uplets

Un **couple** d'éléments est la donnée de deux éléments dans un certain ordre. On note un couple entre parenthèses : (a, b). Deux couples (a_1, b_1) et (a_2, b_2) sont égaux si et seulement si $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$. On distingue donc le couple (a, b) (énumération ordonnée) de la paire $\{a, b\} = \{b, a\}$ (énumération non ordonnée). En général, $(a, b) \neq (b, a)$ alors que $\{a, b\} = \{b, a\}$. Enfin, dans le couple (a, b), les éléments a et b peuvent être égaux, le couple s'écrivant alors (a, a), mais l'ensemble $\{a, a\} = \{a\}$ est un singleton.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la notion de couples se généralise à celle de n-**uplets** $(x_1, \dots, x_n)$. Dans le cas où $n = 3$, on parle de **triplet** (x, y, z). Dans un n-uplet, certains éléments peuvent être égaux entre eux.

Il ne faut pas confondre le n-uplet (ou la famille) $(x_1, \dots, x_n)$ et l'ensemble $\{x_1, \dots, x_n\}$. Par exemple, $(1, 2, 3) \neq (3, 2, 1)$ alors que $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$, ou $(1, 1, 2) \neq (1, 2)$ alors que $\{1, 1, 2\} = \{1, 2\}$.

1.3.2 Produit cartésien

Définition 30

Soient E *et* F *deux ensembles non vides. Le* ***produit cartésien*** \笛卡尔积\ *de* E *par* F*, noté* $E \times F$*, est l'ensemble des couples* (x, y) *tels que* $x \in E$ *et* $y \in F$ *:*

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}.$$

Notation Si $E = F$, le produit cartésien $E \times F$ se note E^2.

Exemples 31

- *Soient* $E = \{a, b\}$ *et* $F = \{1, 2, 3\}$.
  Alors $E \times F = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$.
- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *est l'ensemble des couples* (x, y) *de réels. On visualise cet ensemble comme un plan muni d'un repère, et le couple* (x, y) *est identifié au point de coordonnées* (x, y).
- *L'ensemble* $\mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ *correspond, dans le plan muni d'un repère, à l'axe des abscisses.*
- $(\mathcal{P}(E))^2 = \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ *est l'ensemble des couples* (A, B) *où* A *et* B *sont des parties de* E.

En général, $E \times F \neq F \times E$ car l'ordre importe dans un couple.

Le produit cartésien se généralise au produit de n ensembles.

Définition 32

Soit n *un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soient* $E_1, \dots, E_n$ n *ensembles non vides. On appelle* ***produit cartésien*** *de* $E_1, \dots, E_n$*, noté* $E_1 \times \dots \times E_n$*, l'ensemble des* n*-uplets* $(x_1, \dots, x_n)$ *tels que pour tout* $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i \in E_i$ *:*

$$E_1 \times \dots \times E_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i \in E_i\}.$$

Notation Si $E_1 = \dots = E_n = E$, on note le produit cartésien E^n.

EXEMPLES 33

- $\mathbb{R}^n$ *désigne l'ensemble des* n*-uplets* $(x_1, \ldots, x_n)$ *de réels, i.e. tels que pour tout* $i \in \{1, \ldots, n\}$, $x_i \in \mathbb{R}$.
- $[0, +\infty[\times[0, 2\pi[\times[0, \pi[$ *est l'ensemble des triplets* (r, θ, φ) *où* $r \in [0, +\infty[$, $\theta \in [0, 2\pi[$ *et* $\varphi \in [0, \pi[$.

Chapitre 2 Applications

Table des matières du chapitre

2.1 Applications

2.1.1 Définitions

Intuitivement, une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est un objet qui à tout élément x de E associe un unique élément y de F, noté $f(x)$.

Nous allons en donner une définition rigoureuse au moyen des ensembles.

Définition 1
Soient E et F deux ensembles. On appelle ***application de E dans F*** \映射\ *tout triplet $f = (E, F, \mathcal{G})$ où E, F et $\mathcal{G}$ sont trois ensembles vérifiant :*

1. *$\mathcal{G}$ est un sous-ensemble de $E \times F$,*
2. *pour tout élément x de E, il existe un unique élément y de F tel que $(x, y) \in \mathcal{G}$.*

Avec les notations précédentes,

- *E est appelé l'****ensemble de définition*** \函数f的定义域\ *ou ensemble de départ de f,*
- *F est appelé l'****ensemble d'arrivée*** *de f,*
- *$\mathcal{G}$ est appelé le* ***graphe*** *de f.*
- *Pour tout élément x de E, l'unique élément y de F tel que $(x, y) \in \mathcal{G}$ est noté $f(x)$, et est appelé* ***image*** \像或值\ *de x par f.*
- *Pour tout élément y de F, on appelle* ***antécédent*** \原像\ *de y par l'application f, tout élément x de E tel que $y = f(x)$.*
- *L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E ou $\mathcal{F}(E, F)$.*

Remarque 2 — *Le graphe $\mathcal{G}$ de f est donc égal à $\mathcal{G} = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$.*

Notation En général, le triplet $f = (E, F, \mathcal{G})$ est noté de la façon suivante :

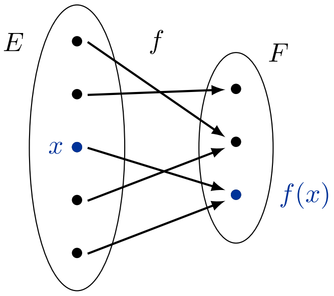
$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array},$$

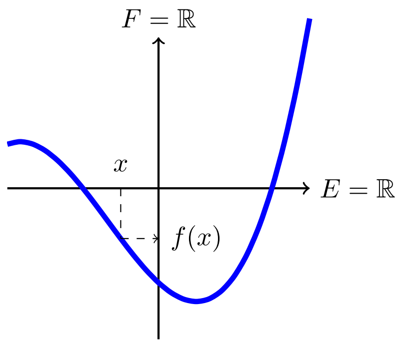
$f(x)$ étant remplacé par son expression.

On utilise également la notation $f : E \longrightarrow F$ pour signifier que f est une application de E dans F.

Remarque 3 — *Dans ce cours, on ne fera pas de distinction entre application et fonction.*

On peut représenter une application de deux manières : soit sous forme de diagrammes fléchés, soit en représentant son graphe dans le plan muni d'un repère, à la manière des courbes représentatives d'une fonction numérique.

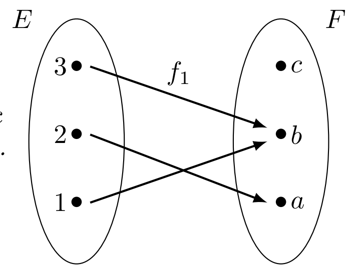




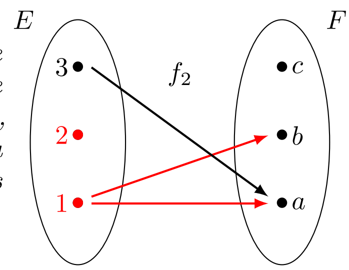
Exemples 4

- *Considérons les ensembles* $E = \{1, 2, 3\}$ *et* $F = \{a, b, c\}$. *Soient* $\mathcal{G}_1 = \{(1, b), (2, a), (3, b)\}$ *et* $\mathcal{G}_2 = \{(1, a), (1, b), (3, a)\}$ *deux sous-ensembles de* $E \times F$.

  Le triplet $(E, F, \mathcal{G}_1)$ *vérifie les points 1. et 2. de la définition et est donc une application* f_1 *de* E *dans* F. *On a* $f_1(1) = b$, $f_1(2) = a$ *et* $f_1(3) = b$.



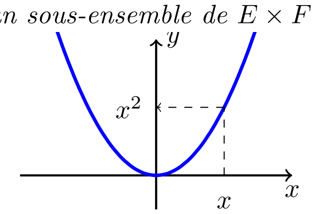
  Le triplet $(E, F, \mathcal{G}_2)$ *vérifie le point 1. mais ne vérifie pas le point 2. de la définition : à l'élément* 1 *de* E, *on ne peut pas associer un unique élément de* F *car les couples* $(1, a)$ *et* $(1, b)$ *sont éléments de* $\mathcal{G}_2$. *De plus, l'élément* 2 *de* E *ne peut être associé à aucun élément de* F *car il n'y a pas de couples de la forme* $(2, \cdot)$ *dans* $\mathcal{G}_2$. *Ainsi, ce triplet ne définit pas une application de* E *dans* F.



- *Considérons les ensembles* $E = \mathbb{R}$ *et* $F = \mathbb{R}$. *Soit* $\mathcal{G}_1 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ *un sous-ensemble de* $E \times F$.

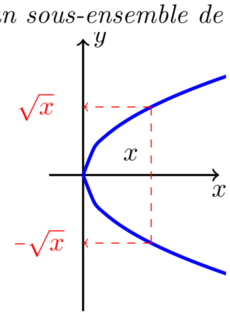
  Le triplet $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathcal{G}_1)$ *est une application* f *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *notée*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}.$$



- *Considérons les ensembles* $E = \mathbb{R}_+$ *et* $F = \mathbb{R}$. *Soit* $\mathcal{G}_2 = \{(x^2, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ *un sous-ensemble de* $E \times F$.

  Le triplet $(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}, \mathcal{G}_2)$ *vérifie le point 1. mais ne vérifie pas le point 2. de la définition : à chaque élément* x *non nul de* $E = \mathbb{R}_+$, *on ne peut pas associer un unique élément de* $F = \mathbb{R}$ *car les couples* $(x, \sqrt{x})$ *et* $(x, -\sqrt{x})$ *sont éléments de* $\mathcal{G}_2$. *Ce triplet ne définit donc pas une application de* E *dans* F.



Remarque 5 — *Pour définir une application $f : E \longrightarrow F$, il suffit de préciser comment, à chaque élément x de E, est associée son image $f(x)$ dans F. C'est le principe de la notation $f : E \longrightarrow F\ ;\ x \longmapsto f(x)$.*

C'est désormais ainsi que nous définirons et manipulerons les applications.

Exemples 6

- *Soit E un ensemble. On appelle* **application identité** *de E, notée id_E, l'application définie par*

$$\mathrm{id}_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}.$$

- *Soient E et F deux ensembles. Soit a un élément de F. On appelle* **fonction constante** *égale à a l'application définie par*

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & a \end{array}.$$

- *Soient E et F deux ensembles tels que $E \subset F$. On appelle* **injection canonique** *de E dans F l'application définie par*

$$i : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & x \end{array}.$$

- *Soient E un ensemble non vide et A une partie de E. On appelle* **fonction indicatrice de** *A, notée $\mathbb{1}_A$ la fonction définie par*

$$\mathbb{1}_A : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{array}.$$

- *La fonction exponentielle* $\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x \end{array}$ *est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La fonction logarithme* $\ln : \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array}$ *est une application de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.*

Remarque 7 — *Pour vérifier qu'une fonction $f : E \longrightarrow F$ définie par $x \longmapsto f(x)$ est bien définie, il faut vérifier les deux points suivants :*

1. *tout élément de E doit posséder une image et une seule,*
2. *cette image doit être dans F.*

Exemples 8

- *La relation $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas une application car 0 n'a pas d'image par f. Mais la relation $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est bien une application.*
- *La relation $f : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ z \longmapsto \arg(z)$ n'est pas une application car tout élément de $\mathbb{U}$ possède une infinité d'images car l'argument d'un nombre complexe est défini modulo 2π.*
- *La relation $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+\ ;\ x \longmapsto x^2+2x+1$ est une application car pour tout $x \in \mathbb{R}$, x a une seule image par f, égale à x^2+2x+1, et $x^2+2x+1 = (x+1)^2 \geq 0$ donc $f(x) \in \mathbb{R}_+$.*

Définition 9

Deux applications f et g sont dites **égales** *si elles ont :*

1. *le même ensemble de départ E,*
2. *le même ensemble d'arrivée F,*
3. *le même graphe : pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$.*

On note $f = g$.

Exemple 10 — *Les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto x^2$ et $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto x^2$ ne sont pas égales car elles n'ont pas le même ensemble de départ.*