Chapitre 2 Applications

Table des matières du chapitre

2.1 Applications

2.1.1 Définitions

Intuitivement, une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est un objet qui à tout élément x de E associe un unique élément y de F, noté $f(x)$.

Nous allons en donner une définition rigoureuse au moyen des ensembles.

Définition 1
Soient E et F deux ensembles. On appelle ***application de E dans F*** \映射\ *tout triplet $f = (E, F, \mathcal{G})$ où E, F et $\mathcal{G}$ sont trois ensembles vérifiant :*

1. *$\mathcal{G}$ est un sous-ensemble de $E \times F$,*
2. *pour tout élément x de E, il existe un unique élément y de F tel que $(x, y) \in \mathcal{G}$.*

Avec les notations précédentes,

- *E est appelé l'****ensemble de définition*** \函数f的定义域\ *ou ensemble de départ de f,*
- *F est appelé l'****ensemble d'arrivée*** *de f,*
- *$\mathcal{G}$ est appelé le* ***graphe*** *de f.*
- *Pour tout élément x de E, l'unique élément y de F tel que $(x, y) \in \mathcal{G}$ est noté $f(x)$, et est appelé* ***image*** \像或值\ *de x par f.*
- *Pour tout élément y de F, on appelle* ***antécédent*** \原像\ *de y par l'application f, tout élément x de E tel que $y = f(x)$.*
- *L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E ou $\mathcal{F}(E, F)$.*

Remarque 2 — *Le graphe $\mathcal{G}$ de f est donc égal à $\mathcal{G} = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$.*

Notation En général, le triplet $f = (E, F, \mathcal{G})$ est noté de la façon suivante :

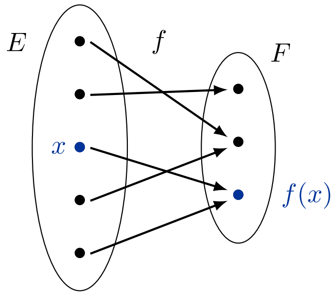
$$f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array},$$

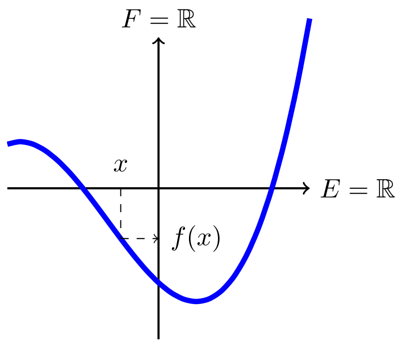
$f(x)$ étant remplacé par son expression.

On utilise également la notation $f : E \longrightarrow F$ pour signifier que f est une application de E dans F.

Remarque 3 — *Dans ce cours, on ne fera pas de distinction entre application et fonction.*

On peut représenter une application de deux manières : soit sous forme de diagrammes fléchés, soit en représentant son graphe dans le plan muni d'un repère, à la manière des courbes représentatives d'une fonction numérique.

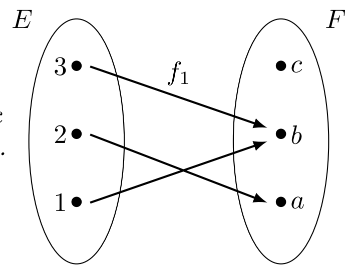




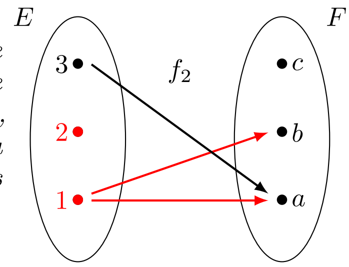
Exemples 4

- *Considérons les ensembles* $E=\{1,2,3\}$ *et* $F=\{a,b,c\}$. *Soient* $\mathcal{G}_1=\{(1,b),(2,a),(3,b)\}$ *et* $\mathcal{G}_2=\{(1,a),(1,b),(3,a)\}$ *deux sous-ensembles de* $E\times F$.

  Le triplet $(E,F,\mathcal{G}_1)$ *vérifie les points 1. et 2. de la définition et est donc une application* f_1 *de* E *dans* F. *On a* $f_1(1)=b$, $f_1(2)=a$ *et* $f_1(3)=b$.



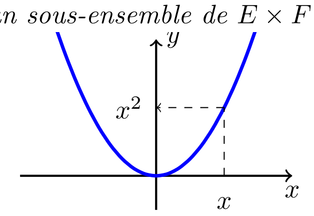
  Le triplet $(E,F,\mathcal{G}_2)$ *vérifie le point 1. mais ne vérifie pas le point 2. de la définition : à l'élément* 1 *de* E, *on ne peut pas associer un unique élément de* F *car les couples* $(1,a)$ *et* $(1,b)$ *sont éléments de* $\mathcal{G}_2$. *De plus, l'élément* 2 *de* E *ne peut être associé à aucun élément de* F *car il n'y a pas de couples de la forme* $(2,\cdot)$ *dans* $\mathcal{G}_2$. *Ainsi, ce triplet ne définit pas une application de* E *dans* F.



- *Considérons les ensembles* $E=\mathbb{R}$ *et* $F=\mathbb{R}$. *Soit* $\mathcal{G}_1=\{(x,x^2)\mid x\in\mathbb{R}\}$ *un sous-ensemble de* $E\times F$.

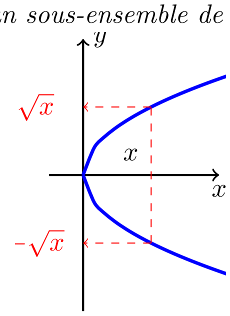
  Le triplet $(\mathbb{R},\mathbb{R},\mathcal{G}_1)$ *est une application* f *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *notée*

$$f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2\end{array}.$$



- *Considérons les ensembles* $E=\mathbb{R}_+$ *et* $F=\mathbb{R}$. *Soit* $\mathcal{G}_2=\{(x^2,x)\mid x\in\mathbb{R}\}$ *un sous-ensemble de* $E\times F$.

  Le triplet $(\mathbb{R}_+,\mathbb{R},\mathcal{G}_2)$ *vérifie le point 1. mais ne vérifie pas le point 2. de la définition : à chaque élément* x *non nul de* $E=\mathbb{R}_+$, *on ne peut pas associer un unique élément de* $F=\mathbb{R}$ *car les couples* $(x,\sqrt{x})$ *et* $(x,-\sqrt{x})$ *sont éléments de* $\mathcal{G}_2$. *Ce triplet ne définit donc pas une application de* E *dans* F.



Remarque 5 — *Pour définir une application $f : E \longrightarrow F$, il suffit de préciser comment, à chaque élément x de E, est associée son image $f(x)$ dans F. C'est le principe de la notation $f : E \longrightarrow F \; ; \; x \longmapsto f(x)$.*

C'est désormais ainsi que nous définirons et manipulerons les applications.

Exemples 6

- *Soit E un ensemble. On appelle **application identité** de E, notée id_E, l'application définie par*

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{id}_E : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & x \end{array}.$$

- *Soient E et F deux ensembles. Soit a un élément de F. On appelle **fonction constante** égale à a l'application définie par*

$$\begin{array}{rccl} f : & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & a \end{array}.$$

- *Soient E et F deux ensembles tels que $E \subset F$. On appelle **injection canonique** de E dans F l'application définie par*

$$\begin{array}{rccl} i : & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & x \end{array}.$$

- *Soient E un ensemble non vide et A une partie de E. On appelle **fonction indicatrice de** A, notée $\mathbb{1}_A$ la fonction définie par*

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_A : & E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{array}.$$

- *La fonction exponentielle* $\begin{array}{rccl} \exp : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{e}^x \end{array}$ *est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La fonction logarithme* $\begin{array}{rccl} \ln : &]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln x \end{array}$ *est une application de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.*

Remarque 7 — *Pour vérifier qu'une fonction $f : E \longrightarrow F$ définie par $x \longmapsto f(x)$ est bien définie, il faut vérifier les deux points suivants :*

1. *tout élément de E doit posséder une image et une seule,*
2. *cette image doit être dans F.*

Exemples 8

- *La relation $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas une application car 0 n'a pas d'image par f. Mais la relation $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est bien une application.*
- *La relation $f : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; z \longmapsto \arg(z)$ n'est pas une application car tout élément de $\mathbb{U}$ possède une infinité d'images car l'argument d'un nombre complexe est défini modulo 2π.*
- *La relation $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \; ; \; x \longmapsto x^2 + 2x + 1$ est une application car pour tout $x \in \mathbb{R}$, x a une seule image par f, égale à $x^2 + 2x + 1$, et $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0$ donc $f(x) \in \mathbb{R}_+$.*

Définition 9

*Deux applications f et g sont dites **égales** si elles ont :*

1. *le même ensemble de départ E,*
2. *le même ensemble d'arrivée F,*
3. *le même graphe : pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$.*

On note $f = g$.

Exemple 10 — *Les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; x \longmapsto x^2$ et $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; x \longmapsto x^2$ ne sont pas égales car elles n'ont pas le même ensemble de départ.*

2.1.2 Restrictions et prolongements

Définition 11
Soient E et F deux ensembles. Soit A une partie de E. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On appelle ***restriction*** *de f à A, l'application, notée $f_{|A}$, définie par*

$$f_{|A} : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}.$$

Exemple 12 — *La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ n'est pas strictement croissante mais la restriction $f_{|\mathbb{R}_+}$ de f à $\mathbb{R}_+$ l'est.*

Définition 13
Soient E et F deux ensembles. Soit A une partie de E. Soit $f : A \longrightarrow F$ une application. On appelle ***prolongement*** *de f à E, toute application g de E dans F telle que, pour tout élément x de A, $g(x) = f(x)$.*

Un tel prolongement vérifie $g_{|A} = f$. Il n'est bien sûr pas unique. On parlera donc **d'un** prolongement et non **du** prolongement.

Exemple 14 — *On peut prolonger l'application $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}$ en fixant une valeur en 0. Par exemple, l'application suivante est un prolongement de f sur $\mathbb{R}$:*

$$\tilde{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \textit{si } x \neq 0, \\ 1 \ \textit{si } x = 0 \end{cases} \end{array}.$$

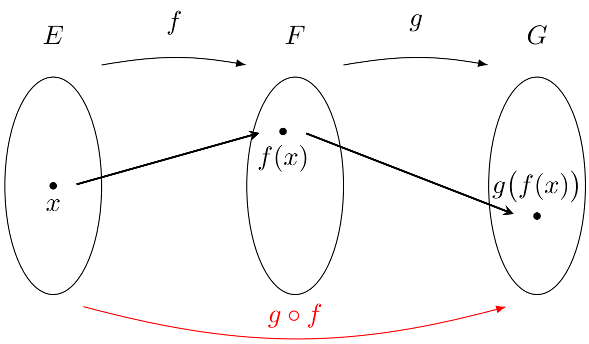
La valeur choisie en 0 est 1. Il s'agit de la limite de $\dfrac{\sin(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0. L'intérêt de ce prolongement parmi les autres est que la fonction $\tilde{f}$ ainsi définie est continue sur $\mathbb{R}$.

2.1.3 Composée d'applications

Définition 15
Soient E, F et G trois ensembles. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. La ***composée*** *$g \circ f$ \函数f和g的复合\ est l'application définie par :*

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g\big(f(x)\big) \end{array}.$$

On pourra retenir le schéma suivant :



Remarques 16

- *Avec les notations ci-dessus, $g \circ f$ est bien définie mais ce n'est pas forcément le cas de $f \circ g$: on doit s'assurer que pour tout $x \in F$, $g(x) \in E$ afin de pouvoir appliquer f.*
- *Si $E = G$ alors $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bien définies mais en général, ces deux applications ne sont pas égales : $g \circ f \neq f \circ g$. On dit que la composition $\circ$ n'est pas commutative.*

On fera donc attention à l'ordre : pour calculer $\big(g \circ f\big)(x)$, on calcule d'abord $f(x)$ puis $g\big(f(x)\big)$.

Exemple 17 — *Soient f et g deux applications définies par*

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \quad et \quad g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\big(g \circ f\big)(x) = g\big(f(x)\big) = f(x) + 1 = x^2 + 1$

et $\big(f \circ g\big)(x) = f\big(g(x)\big) = \big(g(x)\big)^2 = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

Donc $g \circ f$ et $f \circ g$ ne sont pas égales.

Remarque 18 — *Par abus, lorsque l'on a deux applications $f : E \longrightarrow F$ et $g : H \longrightarrow G$ avec seulement $F \subset H$ (au lieu de $F = H$), on utilise aussi la notation $g \circ f$ pour désigner la composée $g_{|F} \circ h$.*

Proposition 19
Soient E, F, G et H des ensembles. Soient $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$ trois applications. Alors

- *$\circ$ est associative : $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.*
- *$\mathrm{id}_E \circ f = f \circ \mathrm{id}_E = f$.*

Preuve —

- Soit $x \in E$. On a $\big((h \circ g) \circ f\big)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) = h\Big(\,(g \circ f)\,(x)\Big) = \Big(h \circ (g \circ f)\Big)(x)$.
  D'où le premier point.
- Soit $x \in E$. On a $\big(\mathrm{id}_E \circ f\big)(x) = \mathrm{id}_E\big(f(x)\big) = f(x) = f\big(\mathrm{id}_E(x)\big) = \big(f \circ \mathrm{id}_E\big)(x)$.
  D'où le second point.

□

Notation Soient E un ensemble non vide et f une application de E dans E. On peut composer f avec elle-même autant de fois que l'on veut.

On note ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = \underbrace{f \circ f \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$ et $f^0 = \mathrm{id}_E$.

En général, la composition $\circ$ n'étant pas commutative, si f et g sont deux applications d'un ensemble E dans lui même, $(g \circ f)^n \neq g^n \circ f^n$. Mais si f et g commutent, alors $(g \circ f)^n = g^n \circ f^n$.

Exemples 20

- *Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = x + 1$.*
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f^n(x) = \Big(\big((x+1)+1\big) + \ldots\Big) + 1 = x + n$.
- *Reprenons l'exemple 17 où f et g sont deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 1$.*
  On a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\big(g \circ f\big)(x) = x^2 + 1$, donc $\big(g \circ f\big)^2(x) = \big(g \circ f\big)(x^2+1) = (x^2+1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$.
  De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^2(x) = x^4$ et $g^2(x) = x + 2$. Donc $\big(g^2 \circ f^2\big)(x) = g^2\big(x^4\big) = x^4 + 2$.
  Donc $(g \circ f)^2 \neq g^2 \circ f^2$.

2.1.4 Familles

DÉFINITION 21
Soient E et I deux ensembles. On appelle ***famille d'éléments de** E **indexée par** I, toute application $x : I \longrightarrow E$. On la note $(x_i)_{i\in I}$, où pour tout $i \in I$, $x_i = x(i)$.*

L'élément x_i de la famille $(x_i)_{i\in I}$ s'appelle le ***terme d'indice** i.*

EXEMPLE 22 — *Une famille $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de E correspond donc à l'application $x : [\![1, n]\!] \longrightarrow E$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x(i) = x_i$.*

DÉFINITION 23
Soit E un ensemble. Une ***suite*** *d'éléments de E est une famille d'éléments de E indexée par $\mathbb{N}$. On la note souvent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

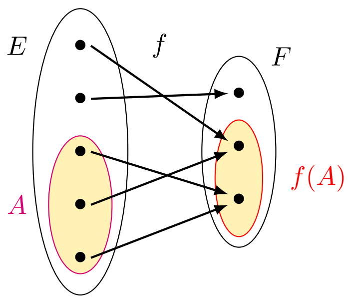
EXEMPLE 24 — *L'ensemble des suites réelles est l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

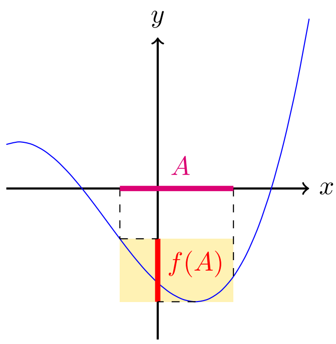
2.2 IMAGE DIRECTE, IMAGE RÉCIPROQUE

2.2.1 Image directe

DÉFINITION 25
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Soit A une partie de E.

- *On appelle* ***image directe*** *de A par f, notée $f(A)$, l'ensemble des images par f des éléments de A :*
$$f(A) = \{y \in F \mid \exists\, x \in A, y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in A\}.$$
- *L'image de E tout entier par f est simplement appelée* ***image de** f. Elle est souvent notée $\mathrm{Im}(f)$ plutôt que $f(E)$.*





L'image de f correspond à l'ensemble des éléments de F qui ont au moins un antécédent par f. En général, si $f : E \longrightarrow F$, l'inclusion $\mathrm{Im}(f) \subset F$ est stricte.

$$\boxed{y \in f(A) \Leftrightarrow \exists\, x \in A, y = f(x).}$$

Si $x \in A$ alors $f(x) \in f(A)$ mais la réciproque est fausse : $f(x) \in f(A)$ n'implique pas $x \in A$ (voir le schéma ci-dessus).

Exemples 26

- *L'image de l'application identité* id_E *est* E.
- *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *l'application définie, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *par* $f(x) = x^2$.
  Alors $f([-2,2]) = [0,4]$, $f([-1,2]) = [0,4]$ *et* $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+$.
  Plus généralement, pour déterminer l'ensemble image d'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *où* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$, *on étudie les variations de* f *et sa continuité.*
- *Soit* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ *l'application définie, pour tout* $z \in \mathbb{C}$, *par* $f(z) = \mathrm{Im}(z)^2$. *L'image de* f *est l'ensemble* $\mathbb{R}_+$: $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+$.
  Preuve — *Montrons ce résultat par double-inclusion.*
  Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$ *et donc* $\mathrm{Im}(z)^2 \in \mathbb{R}_+$. *Donc* $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}_+$.
  Réciproquement, soit $x \in \mathbb{R}_+$. *Posons* $z = i\sqrt{x} \in \mathbb{C}$. *Alors* $\mathrm{Im(z)} = \sqrt{x}$ *et donc* $f(z) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$. *Donc* $x \in \mathrm{Im}(f)$.
  D'où $\mathbb{R}_+ \subset \mathrm{Im}(f)$. □
- *L'image de* $\pi\mathbb{Z} = \{\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$ *par l'application* $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est égale à* $\{0\}$. *L'image de* $[0, 2\pi]$ *est* $[-1,1]$, *celle de* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *est aussi* $[-1,1]$.

Définition 27

Soient $f : E \longrightarrow F$ *une application et* B *un sous-ensemble de* F. *On dit que* f *est* ***à valeurs dans*** B *si l'image de* f *est incluse dans* B : $\mathrm{Im}(f) \subset B$.

Autrement dit, pour tout $x \in E$, $f(x) \in B$.

Proposition 28

Soit $f : E \longrightarrow F$ *une application. Soient* A *et* B *des parties de* E.

1. *Si* $A \subset B$ *alors* $f(A) \subset f(B)$.
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

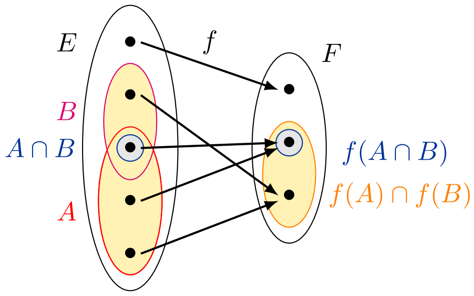
Remarque 29 — *Les propriétés* 2. *et* 3. *se généralisent à une famille quelconque de parties de* E.

Preuve —

1. Supposons $A \subset B$. Montrons que $f(A) \subset f(B)$. Soit $y \in f(A)$.
   Par définition de $f(A)$, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Or $A \subset B$, donc $x \in B$. Donc $y = f(x) \in f(B)$.
   D'où $f(A) \subset f(B)$.
2. ▷ Montrons que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.
   Soit $y \in f(A \cup B)$. Par définition de $f(A \cup B)$, il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$.
   1er cas : $x \in A$. Alors $y = f(x) \in f(A)$. Or $f(A) \subset f(A) \cup f(B)$. Donc $x \in f(A) \cup f(B)$.
   2nd cas : $x \in B$. Alors $y = f(x) \in f(B)$. Or $f(B) \subset f(A) \cup f(B)$. Donc $x \in f(A) \cup f(B)$.
   Dans tous les cas, $x \in f(A) \cup f(B)$. Donc $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.
   ◁ Réciproquement, montrons que $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.
   On a $A \subset A \cup B$ donc, d'après le deuxième point, $f(A) \subset f(A \cup B)$.
   De même, comme $B \subset A \cup B$, $f(B) \subset f(A \cup B)$.
   Donc $f(A \cup B)$ contient $f(A)$ et $f(B)$. Or $f(A) \cup f(B)$ est le plus petit ensemble qui contient $f(A)$ et $f(B)$, donc $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.
   De ces deux points, on obtient le résultat.
3. Soit $y \in f(A \cap B)$. Par définition de $A \cap B$, il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$.
   Comme $A \cap B \subset A$, $x \in A$ et $y = f(x) \in f(A)$.
   Comme $A \cap B \subset B$, $x \in B$ et $y = f(x) \in f(B)$.
   Donc $x \in f(A) \cap f(B)$.
   D'où le résultat.

□

Attention, l'inclusion $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ peut être stricte, comme le montre le schéma suivant. On peut également considérer l'exemple suivant : $\sin([0, 2\pi]) \cap \sin([-\pi, \pi]) = [-1, 1]$ et $\sin([0, 2\pi] \cap [-\pi, \pi]) = [0, 1]$.



Remarque 30 — *On ne peut en général rien dire sur* $f\left(\complement_E A\right)$ *et* $\complement_F f(A)$.

Exemple 31 — *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *l'application définie, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *par* $f(x) = x^2$. *Soit* $A = [-1; 3]$.

On a $\complement A = \,]-\infty, -1[\, \cup \,]3, +\infty[$.

Donc $f\left(\complement A\right) =]1, +\infty[$ *et* $\complement f(A) = \complement[0, 9] = \,]-\infty, 0[\, \cup \,]9, +\infty[$. *Il n'y a donc aucune inclusion entre ces ensembles.*

Définition 32
Soient E un ensemble et A une partie de E. Soit $f : E \longrightarrow E$ une application. On dit que A est ***stable*** *par f si $f(A) \subset A$.*

Autrement dit, pour tout $x \in A$, $f(x) \in A$.

Exemple 33 — *L'intervalle* $[-1, 1]$ *est une partie stable par la fonction* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto x^2$.