Ex1

$$f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}, \quad P \mapsto P(1)$$

1. $f : (\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_1) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $P \longmapsto P(1)$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On note $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$.

$$|f(P)| = |P(1)| = \left|\sum_{i=0}^{d} a_i\right| \leq \sum_{i=0}^{d} |a_i| \text{ par inégalité triangulaire} = \|P\|_1$$

$\|P\|_1 = \sum_{i=0}^{d} |a_i|$

$|||f||| = \sup\left\{ \frac{|f(P)|}{\|P\|_1}, P \in \mathbb{R}[X] \text{ non nul} \right\}$

Donc f est continue de $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_1)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

et $|||f||| \leq 1$

Si $\forall x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E$ alors $|||f||| \leq M$.

Prenons $P = 1 \in \mathbb{R}[X]$.

On a $|f(P)| = 1$ et $\|P\|_1 = |1| = 1$.

Donc $P \in \mathcal{B}_{\|\cdot\|_1}(0,1)$, et donc $|||f||| \geq 1$

Donc $|||f||| = 1$.

2. $f : (\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $P \longmapsto P(1)$.

$|f(P)| = \left|\sum_{i=0}^{d} a_i\right|$ et $\|P\|_\infty = \max_{i \in \{0..d\}} a_i$.

$\left|\sum_{i=0}^{d} a_i\right| \cancel{\leq} C \max_{i \in \{0..d\}} a_i$

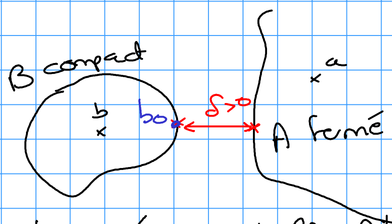
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$P_n = 1 + X + \dots + X^{n-1}$.

$\|P_n\|_\infty = 1$ et $|f(P_n)| = n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Donc f n'est pas bornée sur la boule unité donc f n'est pas continue de $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Exercice 3



L'application $\varphi : B \to \mathbb{R}_+$, $b \mapsto d(b, A)$ est continue (car 1-lipschitzienne).
sur le $\underline{\text{compact}}$ B. Donc φ atteint sur le compact B sa borne inférieure en un point $b_0 \in B$.

Donc pour tout $b \in B$, $\varphi(b) = d(b, A) \geqslant d(b_0, A)$.

Supposons que $d(b_0, A) = 0$.

⚠ $b_0 \notin A \not\Rightarrow d(b_0, A) > 0$

$d(0,]0,1]) = 0$
et $0 \notin]0,1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par caractérisation de la borne inférieure, il existe $a_n \in A$ tel que

$$\| b_0 - a_n \| \leqslant d(b_0, A) + \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

Donc $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite d'éléments de A converge vers b_0.

Or A est fermé donc $b_0 \in A$. Donc $b_0 \in A \cap B = \emptyset$.

Absurde.

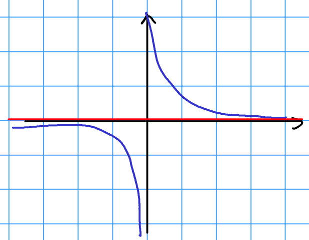
Donc $d(b_0, A) > 0$.

Posons $\delta = d(b_0, A)$. Alors $\delta > 0$.

Soient $a \in A$ et $b \in B$.

$$\underset{= d(a,b)}{\| a - b \|} \geqslant \underbrace{d(b, A)}_{\inf\{\| b - x \|, \, x \in A\}} \geqslant d(b_0, A) = \delta > 0$$

D'où le résultat.



$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \; xy = 1\}$ fermé

$f : (x,y) \mapsto xy$ continue

$A = \{(x, 0), \; x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \{0\}$. fermé

$A \cap B = \emptyset$. $d(A, B) = 0$.