TD 3 - Analyse 4

Ex 6

1. Pour tout $(x,y) \in K^2$,

$$\|f(x)-f(y)\| = \|x-y\| \leq \|x-y\|$$

donc f est 1-lipschitzienne donc continue.

Soient $(x,y)\in K^2$ tel que $x \neq y$ alors $\|f(x)-f(y)\| = \|x-y\| \neq 0$

donc $f(x) \neq f(y)$. Donc f est injective.

2. Montrons que $f(K)=K$. On a $f(K) \subset K$.

$\overline{f(K)} = K$
$= f(K)$

Montrons que $\overline{f(K)} = K$.

Soit $x \in K$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Montrons que $B(x,\varepsilon) \cap f(K) \neq \emptyset$.

Posons $x_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n) \in K$.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments du compact K, donc il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $x^\infty \in K$.

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\|x_{\varphi(n)} - x^\infty\| < \frac{\varepsilon}{2}$

$x_{\varphi(n)} = f^{\varphi(n)}(x_0)$

$$\begin{aligned}
\text{On a } \|x_{\varphi(n_0+1)} - x_{\varphi(n_0)}\| &= \|f^{\varphi(n_0+1)}(x) - f^{\varphi(n_0)}(x)\| \\
&= \|f(f^{\varphi(n_0+1)-1}(x)) - f(f^{\varphi(n_0)-1}(x))\| \\
&= \|f^{\varphi(n_0+1)-1}(x) - f^{\varphi(n_0)-1}(x)\| \quad \text{par hyp. sur } f \\
&= \cdots \\
&= \|f^{\varphi(n_0+1)-\varphi(n_0)}(x) - f^{\underbrace{\varphi(n_0)-\varphi(n_0)}_{0}}(x)\| \\
&= \|f^{\varphi(n_0+1)-\varphi(n_0)}(x) - x\|
\end{aligned}$$

$\varphi(n_0+1) > \varphi(n_0)$

$$\|x_{\varphi(n_0+1)} - x_{\varphi(n_0)}\| \leq \underbrace{\|x_{\varphi(n_0+1)} - x^\infty\|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{\|x^\infty - x_{\varphi(n_0)}\|}_{<\varepsilon/2} < \varepsilon$$

Donc $\|f^{\varphi(n_0+1)-\varphi(n_0)}(x) - x\| < \varepsilon$, donc $f^{\varphi(n_0+1)-\varphi(n_0)}(x) \in B(x,\varepsilon) \cap f(K)$.

Or $\varphi(n_0+1) - \varphi(n_0) \geq 1$, $\quad = f(\underbrace{f^{\varphi(n_0+1)-\varphi(n_0)-1}(\underset{\in K}{x})}_{\in K})$ car $f : K \to K$

Donc $B(x,\varepsilon) \cap f(K) \neq \emptyset$. Donc $\overline{f(K)} = K$.

Or K est compact et f est continue, donc $f(K)$ est compact donc fermé, donc $\overline{f(K)} = f(K)$. Donc $f(K) = K$. Donc f est surjective.