

# ÉLECTROMAGNÉTISME 1 :

## Les postulats de l'électromagnétisme

École Centrale Pékin

2019-2020

### Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction historique : l'avènement de l'électromagnétisme</b>	<b>2</b>
1.1	Régime stationnaire . . . . .	2
1.2	Induction . . . . .	2
1.3	Et MAXWELL arriva... . . . .	3
1.4	Approche choisie pour le cours d'électromagnétisme . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Équations de MAXWELL (1864)</b>	<b>3</b>
2.1	Les quatre équations de MAXWELL . . . . .	3
2.2	Interprétation physique des équations de MAXWELL à travers leur forme intégrale . . . . .	6
2.3	Existence de potentiels vecteur et scalaire . . . . .	8
2.4	Symétrie des sources : symétrie des champs . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Expression des équations de MAXWELL en présence de distributions surfaciques : «relations de passage»</b>	<b>13</b>
3.1	Position du problème et notations . . . . .	13
3.2	Relations de passage pour le champ électrique . . . . .	15
3.3	Relations de passage pour le champ magnétique . . . . .	17
3.4	Relations de passage pour les potentiels vecteur et scalaire . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Énergie transportée par le champ électromagnétique - Vecteur de POYNTING</b>	<b>19</b>
4.1	Existence de l'énergie électromagnétique : un postulat censé . . . . .	19
4.2	Grandeurs énergétiques associées au champ électromagnétique . . . . .	19
4.3	Bilan d'énergie électromagnétique . . . . .	20

# 1 Introduction historique : l'avènement de l'électromagnétisme

## 1.1 Régime stationnaire

En **régime stationnaire**, les champs électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$  sont des entités indépendantes, ayant pour seul point commun le fait d'interagir avec la matière chargée par l'intermédiaire de la **force de LORENTZ**.

**Force de LORENTZ (rappel) :** Dans un référentiel galiléen, la force de LORENTZ subie par un point matériel M de charge  $q$ , de vitesse  $\vec{v}(M, t)$  s'écrit :

$$\vec{F} = q \left( \vec{E}(M, t) + \vec{v}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t) \right)$$

Cette force fait apparaître deux composantes :

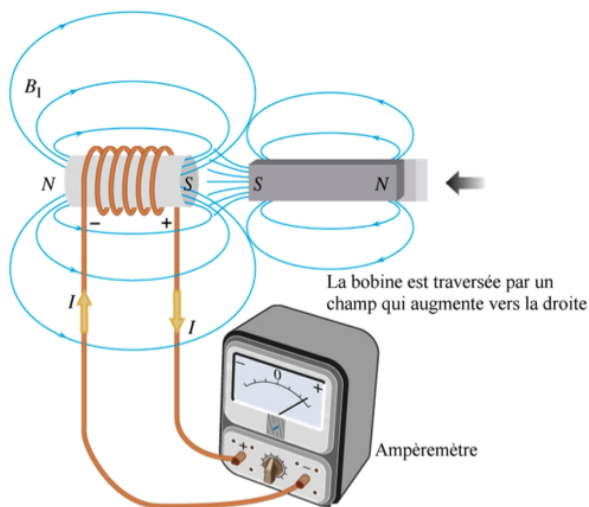
- la composante électrique  $q\vec{E}$  qui permet de modifier  $\|\vec{v}\|$
- la composante magnétique  $q\vec{v} \wedge \vec{B}$  qui permet de modifier la direction de  $\vec{v}$ .

Les principales propriétés de ces deux champs, étudiés en cours d'OUTILS MATHÉMATIQUES POUR LA PHYSIQUE dans le cadre stationnaire (indépendant du temps), correspondent à peu près à l'état des connaissances scientifiques d'avant 1831.

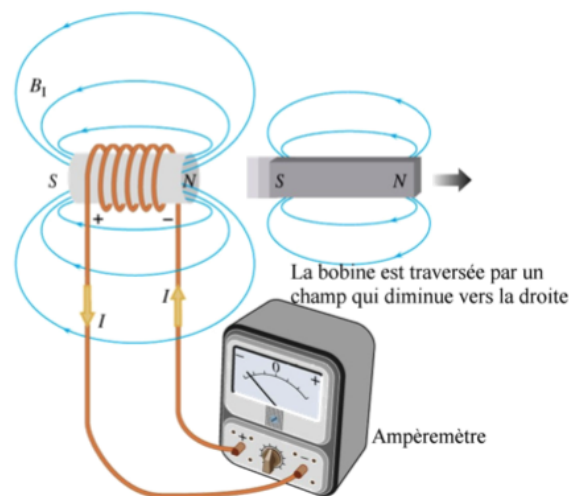
## 1.2 Induction

La vision des champs électrique et magnétique a radicalement changé lors de la découverte du phénomène d'induction par le physicien britannique et membre de la Royal Society, Michael FARADAY, en 1831.

- **Expérience :** une bobine vide est branchée à un ampèremètre et on approche ou on éloigne le pôle Sud d'un aimant.



**FIGURE 1** – Le pôle Sud de l'aimant va vers la bobine



**FIGURE 2** – Le pôle Sud de l'aimant s'éloigne de la bobine

- **Observation :** lorsque l'aimant est fixe, il n'y a pas de courant. Par contre, dès que l'aimant bouge, on constate l'apparition d'un courant  $I$  :

- lorsqu'on approche l'aimant de la bobine, on constate l'apparition d'un courant électrique dans le circuit dans un sens tel que la bobine présente une face Sud (par où sort le courant) à l'aimant : c'est le cas de la figure 1
- lorsqu'on éloigne de la bobine le pôle Sud de l'aimant, un courant, dont le sens effectif est l'opposé du cas précédent, apparaît de sorte que la bobine présente une face Nord (par où rentre le courant) à l'aimant : c'est le cas de la figure 2

- **Interprétation** : L'aimant crée un champ magnétique permanent. Si l'aimant ne bouge pas, le champ magnétique traversant la bobine est stationnaire : il n'y a pas de courant. Quand l'aimant bouge, le flux du champ magnétique à travers la bobine évolue dans le temps, c'est comme si le champ magnétique variait dans le temps : il y a un courant. Ainsi un courant apparaît si le champ magnétique varie dans le temps.

- **Conclusion** : FARADAY déduit qu'un champ magnétique variable dans le temps **induit** (crée) un courant donc a le même effet qu'un champ électrique : c'est le premier pas vers l'unification de l'électromagnétisme.

### 1.3 Et MAXWELL arriva...

En 1864, James Clerk MAXWELL postula que les champs  $\vec{E}(M, t)$  et  $\vec{B}(M, t)$  soient en fait les composantes d'un même ensemble appelé le *champ électromagnétique*. Les lois de l'électricité et du magnétisme sont alors unifiées. La description du champ électromagnétique est donnée sous la forme de 4 équations locales : les **équations de MAXWELL**. Ces équations mettent en relation les champ électrique et magnétique avec des sources de ces champs : les densités volumiques de charges  $\rho(M, t)$  et de courants  $\vec{j}(M, t)$ .

Ces puissantes équations de MAXWELL sont d'une importance capitale : elle permettent de prévoir l'existence et de déterminer les propriétés des **ondes électromagnétiques**. MAXWELL a donc prévu l'existence des ondes électromagnétiques. Elles n'ont été découverte expérimentalement qu'en 1887 par HERTZ, huit ans après la mort de MAXWELL.

### 1.4 Approche choisie pour le cours d'électromagnétisme

Pour traiter l'électromagnétisme, on peut choisir d'établir les lois qui régissent le domaine dans leur ordre chronologique en concluant le cours sur les équations de MAXWELL. À l'inverse, on peut présenter les équations de MAXWELL comme postulat de départ et retrouver les lois et décrire les phénomènes à partir d'elles. C'est l'approche que nous choisirons dans ce cours.

## 2 Équations de MAXWELL (1864)

### 2.1 Les quatre équations de MAXWELL

#### 2.1.1 Énoncé

Considérons un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  dans lequel se trouvent des charges en mouvement. On adopte une modélisation volumique : on peut alors définir le couple de champs  $\{\rho(M, t); \vec{j}(M, t)\}$  qui constituent les **sources du champ électromagnétique**.

Le lien entre ces sources et le champ électromagnétique s'exprime à l'aide de quatre équations locales appelées **équations de MAXWELL** et font partie des postulats de l'électromagnétisme. **Ces équations sont valables en tout point  $M$  et à tout temps  $t$ .**

**Remarque** : On parle en générale d'équations de MAXWELL «dans le *vide*» bien que ces équations fassent apparaître des charges et des courants. Elles sont nommées ainsi par opposition aux équations de MAXWELL «dans les *milieux*» que nous verrons plus tard.

Les quatre équations de MAXWELL

→	① Équation de MAXWELL-GAUSS	$\operatorname{div} \vec{E}(M, t) = \frac{\rho(M, t)}{\epsilon_0}$	M. G.
→	② Équation de MAXWELL-flux <sup>a</sup>	$\operatorname{div} \vec{B}(M, t) = 0$	M. $\emptyset$
→	③ Équation de MAXWELL-FARADAY	$\operatorname{rot} \vec{E}(M, t) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(M, t)$	M. F.
→	④ Équation de MAXWELL-AMPÈRE	$\operatorname{rot} \vec{B}(M, t) = \mu_0 \vec{j}(M, t) + \underbrace{\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(M, t)}_{=\vec{j}_d(M, t)}$	M. A.

a. parfois appelée "équation de MAXWELL-THOMSON"

• Les constantes

Les équations de MAXWELL font intervenir deux constantes :

- la **perméabilité magnétique du vide** :  $\mu_0$ ,
- la **permittivité diélectrique du vide** :  $\epsilon_0$ .

Ces deux constantes sont liées par la relation :

$$\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot c^2 = 1$$

où  $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  désigne la vitesse de la lumière dans le vide.

Dans le cadre du Système International d'unités, on impose  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ , il vient alors  $\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 \cdot c^2} \approx 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

• Les deux groupes

Ces équations fondamentales sont souvent présentées comme deux ensembles de deux équations :

- les équations ① et ④ sont appelées **équations champs/sources** ou **équations extrinsèques** car elles lient le champ électromagnétique avec ses sources. Ces équations prendront des formes différentes lorsqu'on décrira le champ électromagnétique dans des milieux matériels comme les milieux diélectriques ou aimantés. M. G. et M. A.
- les équations ② et ③ sont appelées **équations champs/champs** ou **équations intrinsèques** car elles ne font pas intervenir les sources : ce sont les équations du couplage. Ces deux équations sont indépendantes du milieu dans lequel évolue  $\{\vec{E}; \vec{B}\}$ . M.  $\emptyset$  et M. F.

• «Le courant de déplacement»

Le terme  $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(M, t)$  est homogène à une densité volumique de courant. On le nomme, pour des raisons historiques, **courant de déplacement** et on le note souvent  $\vec{j}_d(M, t)$ .

2.1.2 Propriétés

• **Linéarité des équations de MAXWELL :**

Les équations de MAXWELL sont linéaires : elles relient linéairement le champ électromagnétique  $\{\vec{E}; \vec{B}\}$  aux sources  $\{\rho; \vec{j}\}$ . On peut alors affirmer un **théorème de superposition des phénomènes électromagnétiques** :

**Théorème de superposition :** Si la source  $\{\rho_1(P, t); \vec{j}_1(P, t)\}$  où  $P \in \mathcal{D}$  crée un champ électromagnétique  $\{\vec{E}_1(M, t); \vec{B}_1(M, t)\}$ , et la source  $\{\rho_2(P, t); \vec{j}_2(M, t)\}$  où  $P \in \mathcal{D}$  crée un champ électromagnétique  $\{\vec{E}_2(M, t); \vec{B}_2(M, t)\}$ , alors la source :

$$\{\lambda_1 \rho_1(P, t) + \lambda_2 \rho_2(P, t); \lambda_1 \vec{j}_1(P, t) + \lambda_2 \vec{j}_2(P, t) \text{ où } P \in \mathcal{D}\}$$

crée le champ électromagnétique :

$$\{\lambda_1 \vec{E}_1(M, t) + \lambda_2 \vec{E}_2(M, t); \lambda_1 \vec{B}_1(M, t) + \lambda_2 \vec{B}_2(M, t)\}$$

• **Compatibilité avec l'équation locale de conservation de la charge :**

$\delta M.C \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\delta \rho}{\delta t}$       M.A.  $\frac{\delta \vec{E}}{\delta t} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \text{rot } \vec{B} - \frac{1}{\epsilon_0} \vec{j}$

$\text{div } \frac{\delta \vec{E}}{\delta t}$

$\hookrightarrow \text{div} \left( \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \text{rot } \vec{B} - \frac{1}{\epsilon_0} \vec{j} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\delta \rho}{\delta t}$

$\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \text{div} (\text{rot } \vec{B}) - \frac{1}{\epsilon_0} \text{div } \vec{j} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\delta \rho}{\delta t}$

$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \text{div } \vec{j} = 0$

• **Compatibilité avec le régime stationnaire :** Vous avez vu dans le cours d'OUTILS MATHÉMATIQUES POUR LA PHYSIQUE les équations locales vérifiées par le champ électromagnétique dans le vide en régime permanent :

M.C.  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$       M.ϕ.  $\text{div } \vec{B} = 0$

M.F.  $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$       M.A.  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

**⚠ Incompatibilité avec les lois de COULOMB et de BIOT et SAVART :** il existe une équivalence entre :

- les équations locales de l'électrostatique et la loi intégrale de COULOMB
- les équations locales de la magnétostatique et la loi intégrale de BIOT et SAVART

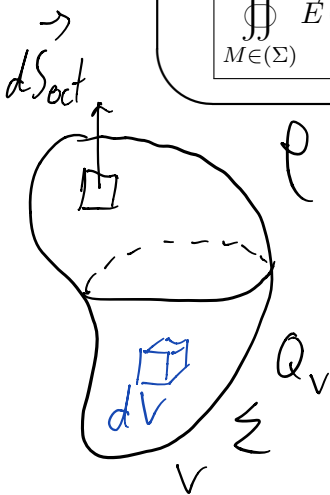
En régime variables, certaines équations locales du régime stationnaire ne sont plus valables : **les lois de COULOMB et de BIOT et SAVART** deviennent fausses en régime variable!  $\rightarrow$  cf TD

## 2.2 Interprétation physique des équations de MAXWELL à travers leur forme intégrale

### 2.2.1 Le théorème de GAUSS

**Théorème de GAUSS :** L'équation de MAXWELL-GAUSS permet de démontrer le théorème de GAUSS :

$$\oiint_{M \in (\Sigma)} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{S}_{ext}(M) = \frac{Q_V(t)}{\epsilon_0} \quad \text{avec } \mathcal{V} \text{ le volume engendré par la surface } (\Sigma)$$



$\rho(n, t)$  M.G.  $\iiint_V \text{div } \vec{E} dV = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$

théorème d'Ostrogradsky :  $\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \frac{Q_V}{\epsilon_0}$

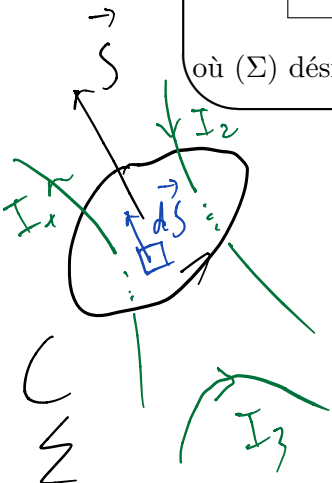
**Lien avec le régime stationnaire :** Le théorème de Gauss démontré dans le cas statique en année 1 reste donc valable en régime variable, en effet l'équation locale  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  est la même en statique et en variable.

### 2.2.2 Le théorème d'AMPÈRE généralisé

**Théorème d'AMPÈRE :** L'équation de MAXWELL-AMPÈRE permet de démontrer le théorème d'AMPÈRE généralisé :

$$\oint_{M \in (C)} \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \underbrace{\iint_{M \in (\Sigma)} \vec{j}(M, t) \cdot d\vec{S}(M)}_{I(t)} + \mu_0 \underbrace{\iint_{M \in (\Sigma)} \vec{j}_d(M, t) \cdot d\vec{S}(M)}_{I_D(t)}$$

où  $(\Sigma)$  désigne toute surface s'appuyant sur le contour fermé et orienté  $(C)$ .



M.A.  $\oiint_{\Sigma} \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_D) \cdot d\vec{S}$  avec  $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

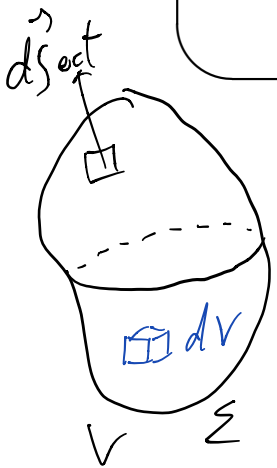
théorème de Stokes :  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{j}_D \cdot d\vec{S}$   
 MEC  $I(t) = I_1 - I_2$

**Lien avec le régime stationnaire :** l'équation locale en régime stationnaire  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  est modifiée en régime variable sinon elle est incompatible avec la loi de conservation de la charge.

### 2.2.3 Le théorème du flux magnétique

**Conservation du flux magnétique :** L'équation de MAXWELL-flux permet de démontrer que le champ magnétique est à flux conservatif à travers une surface fermée ( $\Sigma$ ) :

$$\oiint_{M \in (\Sigma)} \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{S}_{ext}(M) = 0$$



M.Φ  $\iiint_V \text{div } \vec{B} dV = 0$

théorème d'Ostrogradsky  $\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S}_{ext} = 0$

**Lien avec le régime stationnaire :** l'équation locale en régime stationnaire  $\text{div } \vec{B} = 0$  n'est pas modifiée en régime variable : le caractère conservatif du flux magnétique est donc une propriété universelle valable en régime variable quelconque.

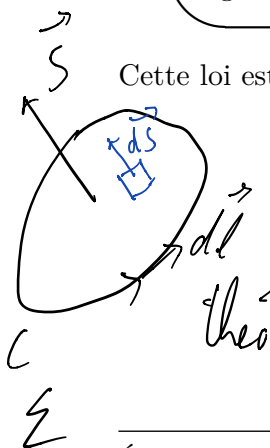
### 2.2.4 La loi de FARADAY

**Loi de FARADAY :** L'équation de MAXWELL-FARADAY permet de démontrer la loi de FARADAY :

$$\underbrace{\oint_{M \in (C)} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{\ell}}_{=e(t)} = - \frac{d}{dt} \underbrace{\left( \iint_{M \in (\Sigma)} \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{S}(M) \right)}_{=-\frac{d\phi}{dt}}$$

$\Leftrightarrow e(t) = - \frac{d\phi(t)}{dt}$

où ( $\Sigma$ ) désigne toute surface s'appuyant sur le contour fermé orienté ( $C$ ),  $\phi$  est le flux magnétique à travers la surface ( $\Sigma$ ) et  $e$  est la force électromotrice induite.



Cette loi est au cœur de l'étude des phénomènes d'induction que nous étudierons plus tard.

M.F.  $\oiint_{\Sigma} \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

théorème de Stokes

$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \left( \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right) = \phi$   
 e(t) f.e.m. principe modérateur de Lenz

## 2.3 Existence de potentiels vecteur et scalaire

### 2.3.1 Existence d'un potentiel vecteur

**Propriété :** Il existe un champ de vecteurs  $\vec{A}(M, t)$  dit **potentiel vecteur** tel que :

$$\vec{B}(M, t) = \text{rot} \vec{A}(M, t)$$

Compatible avec M.  $\phi$ .  $\text{div} \vec{B} = \text{div} (\text{rot} \vec{A}) = 0$

### 2.3.2 Existence d'un potentiel scalaire

**Propriété :** Il existe un champ de scalaires  $V(M, t)$  dit **potentiel scalaire** tel que :

$$\vec{E}(M, t) = -\text{grad} V(M, t) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(M, t)$$

Compatible M.F.  $\text{rot} \vec{E} = \text{rot} (-\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})$   
 $= -\text{rot} (\text{grad} V) - \frac{\partial \text{rot} \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

### 2.3.3 Non unicité des potentiels

**Propriété : Non unicité des potentiels**

- Il existe une **infinité** de couples de potentiels  $\{\vec{A}(M, t); V(M, t)\}$  tels que

$$\vec{B}(M, t) = \text{rot} \vec{A}(M, t) \quad \text{et} \quad \vec{E}(M, t) = -\text{grad} V(M, t) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(M, t)$$

- Le couple de potentiels  $\{\vec{A}(M, t); V(M, t)\}$  n'étant pas défini de façon unique on peut rajouter une relation entre ces deux potentiels. Cette relation est appelée **condition de jauge**. Il existe plusieurs conditions de jauge, on choisira la plus adaptée au domaine d'étude
- La transformation permettant de changer des couples de potentiels, autrement dit transformant le couple  $\{\vec{A}(M, t); V(M, t)\}$  en  $\{\vec{A}(M, t); \tilde{V}(M, t)\}$ , se nomme **transformation de jauge**.

Soit  $\Lambda$  une fonction scalaire quelconque

Le champ  $\vec{B}$  reste inchangé par la transformation

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \text{grad} \Lambda$$

car  $\vec{B}' = \text{rot} \vec{A}' = \text{rot} \vec{A} + \text{rot} (\text{grad} \Lambda) = \vec{B}$



Pour que  $\vec{E}$  reste inchangé :  $V \rightarrow V' = V - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$

car  $\vec{E}' = -\text{grad}(V') - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}$

$$= -\text{grad}(V) + \frac{\partial}{\partial t} \text{grad} \Lambda - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \text{grad} \Lambda$$

$$= \vec{E}$$

On admet que cette liberté de choix permet toujours de choisir  $\vec{A}$  et  $V$  tels que

$$\text{Div} \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

condition de jauge de Lorentz

Les potentiels vérifiant cette égalité vérifient la jauge de Lorentz.

### 2.3.4 Équation de POISSON

On considère une distribution de courant et de charge volumiques décrite par le champ  $\{\rho(M, t); \vec{j}(M, t)\}$ .

**Équation de POISSON pour  $V$**  : en régime variable, le potentiel scalaire  $V(M, t)$  est solution de l'équation de POISSON :

$$\Delta V(M, t) = -\frac{\rho(M, t)}{\epsilon_0} - \frac{\partial \operatorname{div} \vec{A}}{\partial t}(M, t)$$

M.G.  $\operatorname{div} \left( -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$   
 $-\Delta V - \frac{\partial \operatorname{div} \vec{A}}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$   
 $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\partial (\operatorname{div} \vec{A})}{\partial t}$  *jauge de Coulomb*

**Lien avec le régime stationnaire** : en régime stationnaire,  $V(M)$  est solution de l'équation de POISSON :

$$\Delta V(M) = -\frac{\rho(M, t)}{\epsilon_0}$$

*vraie aussi dans la gauge de Coulomb*

qui correspond bien au cas particulier indépendant du temps de l'équation générale en régime variable.

**Équation de POISSON pour  $\vec{A}$**  : en régime variable, le potentiel vecteur  $\vec{A}(M, t)$  est solution de l'équation de POISSON :

$$\Delta \vec{A}(M, t) = -\mu_0 \vec{j}(M, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}(M, t) + \operatorname{grad} \left( \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}(M, t) + \operatorname{div} \vec{A}(M, t) \right)$$

M.A.  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$   
 $\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} - \operatorname{grad} \left( \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$   
 $\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \operatorname{grad} \left( \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} \right)$

*Si gauge de Lorentz*

**Lien avec le régime stationnaire** : en régime stationnaire,  $\vec{A}(M)$  est solution de l'équation de POISSON :

$$\Delta \vec{A}(M) = -\mu_0 \vec{j}(M) + \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A}(M))$$

qui correspond bien au cas particulier indépendant du temps de l'équation générale en régime variable. Cette équation se simplifie en utilisant la **jauge de COULOMB**  $\operatorname{div} \vec{A}(M) = 0$  et devient :

$$\Delta \vec{A}(M) = -\mu_0 \vec{j}(M)$$

## 2.4 Symétrie des sources : symétrie des champs

Les symétries vues en statique restent valables en dynamique. Aucun des résultats qui suit ne sera démontré mais on retiendra qu'ils ne sont valables que si  $\forall P \in \mathcal{D}, \{\rho(P, t); \vec{j}(P, t)\} \neq \{0; \vec{0}\}$  où  $\mathcal{D}$  désigne la distribution de sources.

### 2.4.1 Plan de symétrie

**Définition :** Le plan  $\pi$  constitue un **plan de symétrie** des sources si et seulement si :

$$\forall P \in \mathcal{D}, \{\rho(P', t); \vec{j}(P', t)\} = \{\rho(P, t); \mathcal{S}_\pi(\vec{j}(P, t))\} \text{ où } P' = \mathcal{S}_\pi(P)$$

Cette définition s'étend aux distributions surfacique ou linéique de sources.

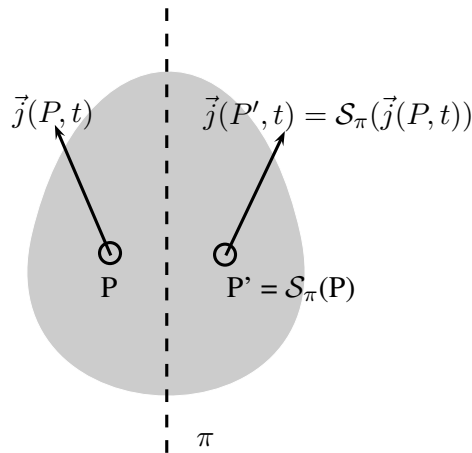


FIGURE 3 –  $\Pi$  constitue un plan de symétrie des sources

Dans ce paragraphe, il sera intéressant de distinguer les composantes du champ électromagnétique qui sont tangentielles au plan de symétrie ( $\vec{E}_\parallel$  et  $\vec{B}_\parallel$ ) des composantes perpendiculaires à ce plan ( $\vec{E}_\perp$  et  $\vec{B}_\perp$ ).

**Théorème - Champ électromagnétique par rapport aux plans de symétrie :**

Soit  $\pi$  un plan de symétrie des sources.

- Si  $M' = \mathcal{S}_\pi(M)$  alors  $\vec{E}(M', t) = \mathcal{S}_\pi(\vec{E}(M, t))$  et  $\vec{B}(M', t) = -\mathcal{S}_\pi(\vec{B}(M, t))$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_\parallel(M', t) = \vec{E}_\parallel(M, t) \\ \vec{E}_\perp(M', t) = -\vec{E}_\perp(M, t) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad V(M') = V(M)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B}_\parallel(M', t) = -\vec{B}_\parallel(M, t) \\ \vec{A}_\parallel(M', t) = \vec{A}_\parallel(M, t) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{B}_\perp(M', t) = \vec{B}_\perp(M, t) \\ \vec{A}_\perp(M', t) = -\vec{A}_\perp(M, t) \end{array} \right.$$

- Si  $M \in \pi$  alors  $\vec{E}(M, t) \in \pi$  et  $\vec{B}(M, t) \perp \pi$ .  
i.e.  $\vec{E}_\perp(M, t) = 0$  et  $\vec{B}_\parallel(M, t) = 0$

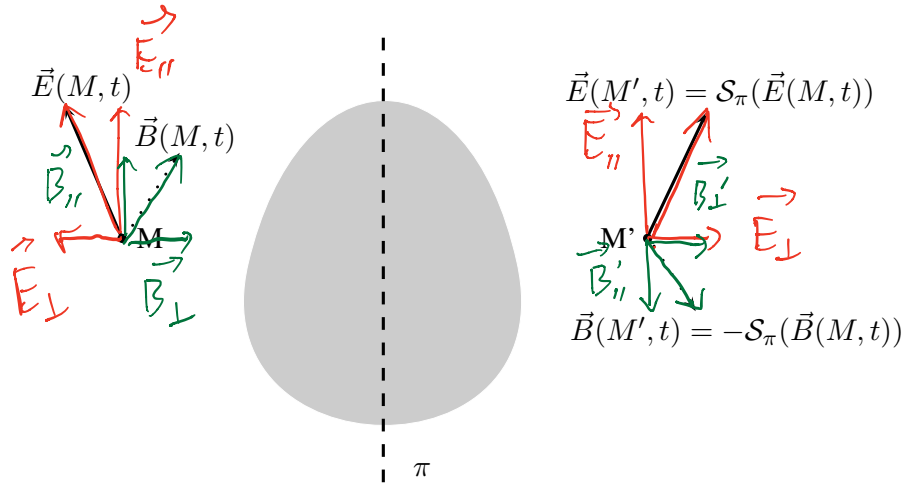


FIGURE 4 – Symétrie (ou antisymétrie) des champs par rapport à un plan de symétrie des sources

### 2.4.2 Plan d'antisymétrie

**Définition :** Le plan  $\pi^*$  constitue un **plan d'antisymétrie** des sources si et seulement si :

$$\forall P \in \mathcal{D}, \{\rho(P', t); \vec{j}(P', t)\} = \{-\rho(P, t); -\mathcal{S}_{\pi^*}(\vec{j}(P, t))\} \text{ où } P' = \mathcal{S}_{\pi^*}(P)$$

Cette définition s'étend aux distributions surfacique ou linéique de sources.

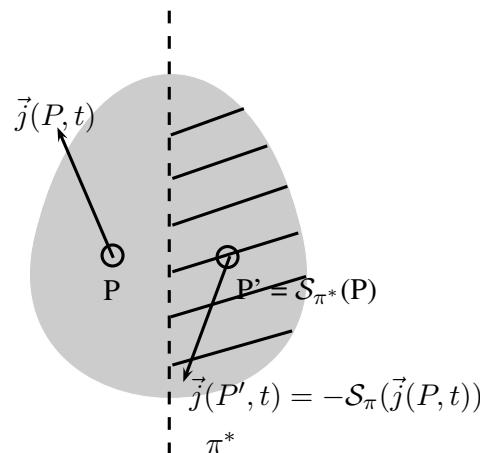


FIGURE 5 –  $\pi^*$  constitue un plan d'antisymétrie des sources

**Théorème - Champ électromagnétique par rapport aux plans d'antisymétrie :**

Soit  $\pi^*$  un plan d'antisymétrie des sources.

- Si  $M' = \mathcal{S}_{\pi^*}(M)$  alors  $\vec{E}(M', t) = -\mathcal{S}_{\pi^*}(\vec{E}(M, t))$  et  $\vec{B}(M', t) = \mathcal{S}_{\pi^*}(\vec{B}(M, t))$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_{\parallel}(M', t) = -\vec{E}_{\parallel}(M, t) \\ \vec{E}_{\perp}(M', t) = \vec{E}_{\perp}(M, t) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad V(M') = -V(M)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B}_{\parallel}(M', t) = \vec{B}_{\parallel}(M, t) \\ \vec{A}_{\parallel}(M', t) = -\vec{A}_{\parallel}(M, t) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{B}_{\perp}(M', t) = -\vec{B}_{\perp}(M, t) \\ \vec{A}_{\perp}(M', t) = \vec{A}_{\perp}(M, t) \end{array} \right.$$

- Si  $M \in \pi^*$  alors  $\vec{B}(M, t) \in \pi^*$  et  $\vec{E}(M, t) \perp \pi^*$ .  
i.e.  $\vec{E}_{\parallel}(M, t) = 0$  et  $\vec{B}_{\perp}(M, t) = 0$

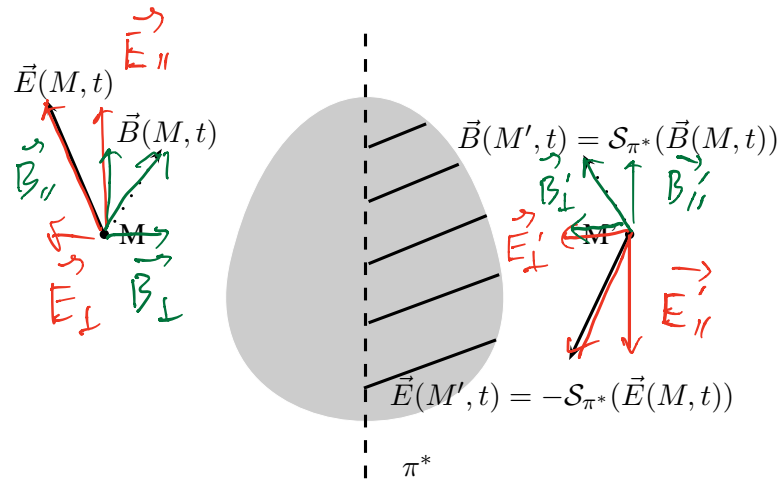


FIGURE 6 – Symétrie (ou antisymétrie) des champs par rapport à un plan d'antisymétrie des sources

### 2.4.3 Invariance d'une distribution

**Définition :** On dit d'une distribution  $\{\rho(\alpha, \beta, \gamma, t); \vec{j}(\alpha, \beta, \gamma, t)\}$  qu'elle est **invariante** selon la coordonnée  $\gamma$  si les sources n'en dépendent effectivement pas :

$$\left\{ \rho(\alpha, \beta, \gamma, t); \vec{j}(\alpha, \beta, \gamma) = j_\alpha(\alpha, \beta, \gamma) \vec{e}_\alpha + j_\beta(\alpha, \beta, \gamma) \vec{e}_\beta + j_\gamma(\alpha, \beta, \gamma) \vec{e}_\gamma \right\}$$

Cette définition s'étend aux distributions surfacique ou linéique de sources.

#### Théorème - Dépendance des champs :

- Si une distribution est invariante selon la coordonnée  $\gamma$ , les **composantes de tous les champs (magnétique, électrique, potentiel vecteur) ne dépendent pas de  $\gamma$**  :

$$\vec{X}(M, t) = X_\alpha(\alpha, \beta, \gamma, t) \vec{e}_\alpha + X_\beta(\alpha, \beta, \gamma, t) \vec{e}_\beta + X_\gamma(\alpha, \beta, \gamma, t) \vec{e}_\gamma$$

- De même, un potentiel scalaire ne dépend pas de  $\gamma$  :

$$V(M, t) = V(\alpha, \beta, \gamma, t)$$



#### Vocabulaire usuel :

- Lorsque les sources sont indépendantes de l'angle  $\theta$  relatif aux coordonnées cylindriques, on dit que les sources sont invariante par toute rotation autour de l'axe (Oz).
- Lorsque les sources sont indépendantes de la variable  $x$  relatif aux coordonnées cartésiennes, on dit que les sources sont invariante par toute translation selon  $\vec{e}_x$ .

## 3 Expression des équations de MAXWELL en présence de distributions surfaciques : «relations de passage»

### 3.1 Position du problème et notations

Les équations de MAXWELL relient le champ électromagnétique et ses sources avec une modélisation volumique. Si on considère une modélisation surfacique des sources, alors on ne peut plus écrire les équations de MAXWELL sous la forme habituelle sur la surface. En fait, on ne peut même plus définir le champ sur la surface.

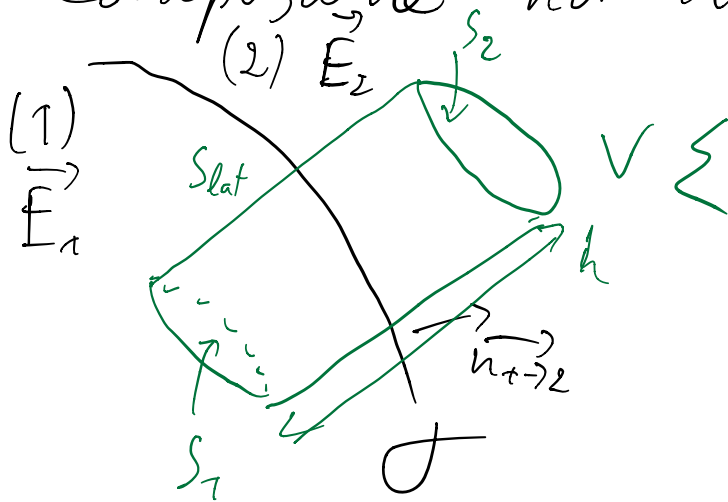
Dans le cadre d'une modélisation surfacique, les équations de MAXWELL sont substituées par des relations liant les discontinuités du champ avec les densités surfaciques de charges et de courant dites **relations de passage**.

### Notations :

Considérons une surface sur laquelle sont réparties des charges et des courants avec les densités respectives  $\sigma(M, t)$  et  $\vec{j}_s(M, t)$  séparant l'espace en deux milieux le milieu ① et le milieu ②. Soit M un point de cette surface. On note  $M_1$  (respectivement  $M_2$ ) un point **infinitement proche de M** mais situé dans le milieu ① (respectivement ②). Le vecteur  $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$  désigne le vecteur unitaire orthogonal à la surface en M et allant de ① vers ②.

Champ électrique  $\vec{E}$ .

Composante normale :  $\vec{E}_\perp$



Théorème de Gauss appliqué à  $\Sigma$  :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\Sigma}}{\epsilon_0}$$

$$Q_{\Sigma} = \sigma S$$

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_{lat}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= -\vec{E}_1 \cdot S \vec{n}_{1 \rightarrow 2} + \vec{E}_2 \cdot S \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \end{aligned}$$

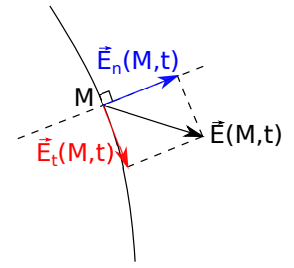
$h \rightarrow 0 \Rightarrow 0$

On en déduit

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (1)$$

Le champ électrique  $\vec{E}(M_1, t)$  au point  $M_1$  est noté  $\vec{E}_1(M, t)$  et le champ  $\vec{E}(M_2, t)$  au point  $M_2$  est noté  $\vec{E}_2(M, t)$ . Ces champs électriques  $\vec{E}_1(M, t)$  et  $\vec{E}_2(M, t)$  peuvent se décomposer en la somme :

- d'une composante contenue dans le plan tangent à la surface en M appelée **composante tangentielle** et notée  $\vec{E}_t(M, t)$ ;  $(\vec{E} \parallel)$
- d'une composante orthogonale au plan tangent à la surface en M appelée **composante normale** et notée  $\vec{E}_n(M, t)$ ;  $(\vec{E} \perp)$



On définit les mêmes notations pour le champ magnétique.

### 3.2 Relations de passage pour le champ électrique

Relations de passage du champ  $\vec{E}$  :

- La composante tangentielle du champ électrique est toujours continue

$$\vec{E}_{2,t}(M, t) = \vec{E}_{1,t}(M, t) \quad (1)$$

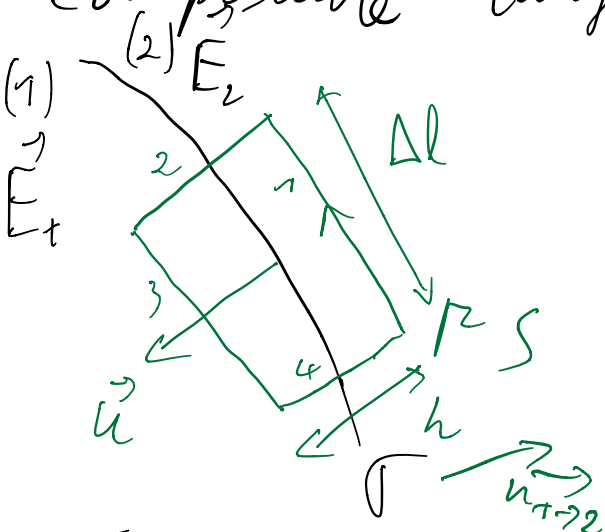
- En présence de charges surfaciques, la composante normale du champ électrique est discontinue

$$\vec{E}_{2,n}(M, t) - \vec{E}_{1,n}(M, t) = \frac{\sigma(M, t)}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (2)$$

Les deux équations peuvent être réunies en une seule :

$$\left. \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E}_2(M, t) - \vec{E}_1(M, t) = \frac{\sigma(M, t)}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}}$$

Composante tangentielle :  $\vec{E}_{\parallel}$



M.F.  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$

$$\iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{u} dS = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{u} dS$$

Théorème de Stokes appliqué à  $R$  :  $\iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_R \vec{E} \cdot d\vec{l}$

$$\oint_R \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{R_3} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{R_4} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$h \rightarrow 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E}_2 \cdot (\vec{u} \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}) \Delta l + \vec{E}_1 \cdot (-\vec{u} \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}) \Delta l$$

$$= (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot (\vec{u} \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}) \Delta l$$

Par ailleurs  $\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

donc  $(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \perp (\vec{u} \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2})$

$\forall \vec{u}$  tangent à la surface

$$\rightarrow \boxed{\vec{E}_{1//} = \vec{E}_{2//}} \quad (2)$$

(1) et (2)

$$\boxed{\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}}$$



## 3.3 Relations de passage pour le champ magnétique

 Relations de passage du champ  $\vec{B}$  :

- La **composante normale** du champ magnétique est toujours continue

$$\vec{B}_{2,n}(M,t) = \vec{B}_{1,n}(M,t) \quad (3)$$

- En présence de courants surfaciques, la **composante tangentielle** du champ magnétique est discontinue

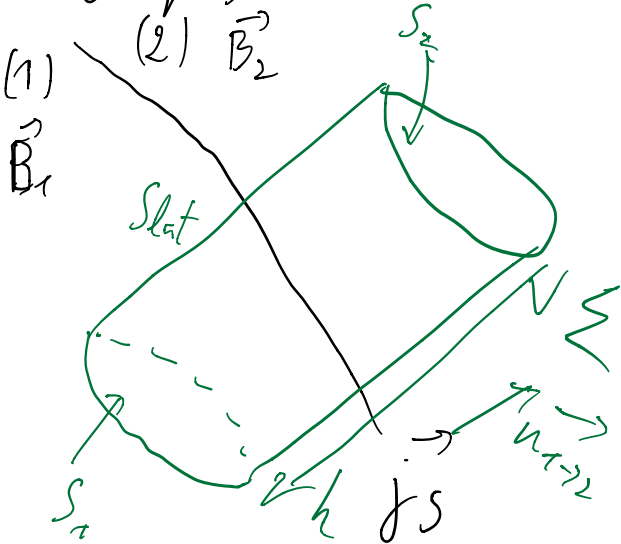
$$\vec{B}_{2,t}(M,t) - \vec{B}_{1,t}(M,t) = \mu_0 \vec{j}_s(M,t) \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (4)$$

Les deux équations peuvent être réunies en une seule :

$$\left. \begin{array}{l} (3) \\ (4) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \boxed{\vec{B}_2(M,t) - \vec{B}_1(M,t) = \mu_0 \vec{j}_s(M,t) \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}}$$

Champ magnétique  $\vec{B}$  :

Composante normale :  $\vec{B}_\perp$



$$\text{M. d} \quad \iiint_V \text{div } \vec{B} \, dV = 0$$

Théorème de Green Ostrogradski :

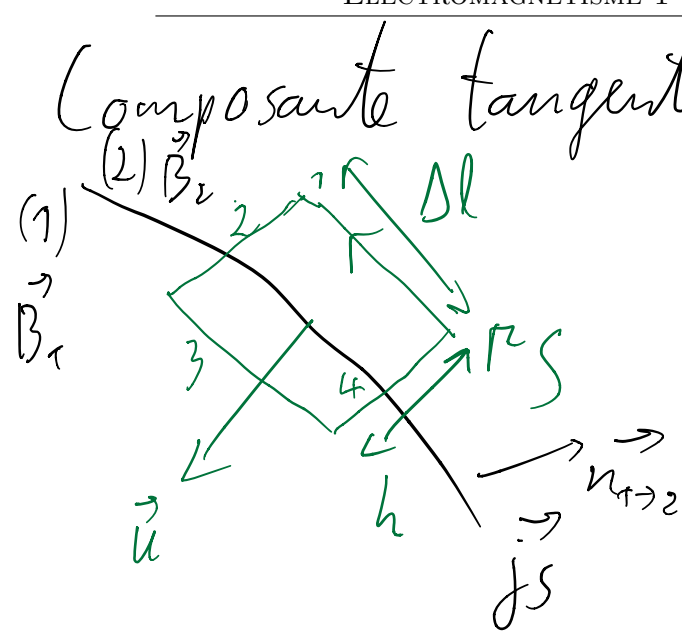
$$\iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_{\text{lat}}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$-\vec{B}_1 \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} + \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = 0$$

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = 0 \Leftrightarrow (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \perp \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad \text{donc} \quad \boxed{\vec{B}_{1\perp} = \vec{B}_{2\perp}} \quad (3)$$

Composante tangentielle :  $\vec{B}_{\parallel}$



Le théorème de Stokes appliqué  
à M.A. :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}$$

Comme avec  $\vec{E}_{\parallel}$ ,  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot (\vec{u} \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}) \Delta l$   
 et  $\epsilon_0 \mu_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

Il reste  $\mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \vec{j}_S \cdot \vec{u} \Delta l$

Finalement  $\boxed{(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot (\vec{u} \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}) = \mu_0 \vec{j}_S \cdot \vec{u}} \quad (4)$

(3) et (4)  $\rightarrow \boxed{\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}}$

### 3.4 Relations de passage pour les potentiels vecteur et scalaire

**Relations de passage des potentiels :** On admettra qu'il est toujours possible de choisir des potentiels vecteur  $\vec{A}(M, t)$  et scalaire  $V(M, t)$  qui soient continus lors de la traversée d'une nappe.

## 4 Énergie transportée par le champ électromagnétique - Vecteur de POYNTING

### 4.1 Existence de l'énergie électromagnétique : un postulat censé

Dans de nombreux exemple, on constate que l'onde électromagnétique a des effet sur la matière : : la lumière du Soleil permet de chauffer l'air (il fait plus chaud le jour que la nuit), le micro-onde permet de chauffer la nourriture... Ainsi, on peut conclure que **l'onde électromagnétique transport de l'énergie qui peut être transmise à la matière**. De plus, cette énergie nous parvient depuis une source, le Soleil par exemple : **l'énergie électromagnétique se déplace**, il existe donc un phénomène de transport. Inversement, un matériau chauffé (par exemple le filament d'une lampe) rayonne (lumière visible ou infra-rouge). La **matière est donc capable de convertir de l'énergie en énergie électromagnétique**.

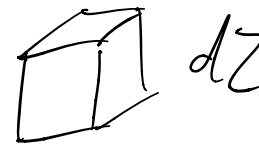
Le développement de la théorie de MAXWELL permet de montrer que le champ électromagnétique contient de l'énergie (ce qui nous intéressera ici), de la quantité de mouvement et du moment cinétique (hors programme).

### 4.2 Grandeurs énergétiques associées au champ électromagnétique

#### 4.2.1 Energie du champ électromagnétique

On note  $u_{em}$  la **densité volumique d'énergie du champ électromagnétique**, c'est l'énergie volumique du champ.

Un volume  $d\tau$  contient une énergie électromagnétique  $dU_{em} = u_{em} d\tau$

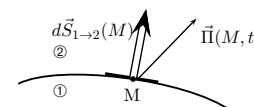


#### 4.2.2 Vecteur de Poynting

Le **vecteur de Poynting**, noté  $\vec{\Pi}(M, t)$ , est le vecteur **densité surfacique de puissance rayonnée**, il caractérise le déplacement de l'énergie avec le champ.

Pendant  $dt$  l'énergie électromagnétique traversant une surface  $d\vec{S}_{1\rightarrow 2}$  est :

$$\delta U_{em} = \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}_{1\rightarrow 2} dt$$



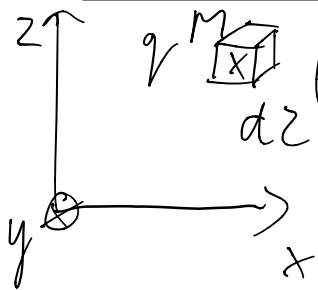
La puissance traversant une surface  $d\vec{S}_{1\rightarrow 2}$  est donc :  $\delta \mathcal{P} = \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}_{1\rightarrow 2}$

**Remarque :** Il est à noter que ces grandeurs sont algébriques et dépendent donc de l'orientation de la surface par rapport à  $\vec{\Pi}(M, t)$

#### 4.2.3 Puissance fournie par un champ électromagnétique à des porteurs de charges

**Théorème - Puissance électromagnétique cédée aux porteurs de charges :** La puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charges est :

$$p_v(M, t) = \vec{j}(M, t) \cdot \vec{E}(M, t) \quad (\text{unité : W.m}^{-3})$$



$$\frac{\delta^2 W}{dz} = \frac{d\vec{F} \cdot d\vec{OM}}{dz} = \frac{d\vec{F} \cdot \vec{v} dt}{dz}$$

$$\frac{d\vec{F}}{dz} = \rho (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

donc  $\frac{\delta^2 W}{dz} = \rho (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} dt$

$$= \vec{j} \cdot \vec{E} dt$$

$$\frac{dP}{dz} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

$$d\vec{j} = \rho \vec{v}$$

**Loi d'OHM locale :**

Dans un **conducteur ohmique**, la densité volumique de courant est proportionnelle au champ électrique :

$$\vec{j}(M, t) = \gamma \cdot \vec{E}(M, t)$$

où  $\gamma$  désigne la conductivité du milieu ohmique (unité :  $\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$  ou  $S \cdot m^{-1}$ ).

La puissance cédée à la matière dans le cas d'un conducteur ohmique est :

$$P_v = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2 \geq 0$$

Cette puissance volumique est toujours positive : le champ électromagnétique cède de l'énergie à la matière. C'est ce que l'on nomme **l'effet JOULE**.

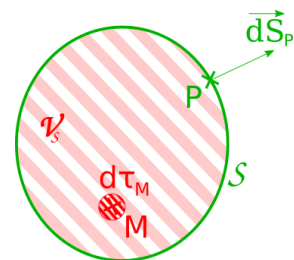
**4.3 Bilan d'énergie électromagnétique**

**4.3.1 Equation globale de Poynting**

Soit une surface fermée  $S$  et  $V_S$  son volume intérieur

L'énergie électromagnétique à l'intérieur de  $S$  est :

$$U_{em}(t) = \iiint_{M \in V_S} u_{em}(M, t) d\tau$$



Cette énergie varie

1. Par des échanges à travers la surface

$$- \iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}_p$$

2. par des pertes à l'intérieur du volume (transfert à la matière)

$$- \iiint_V p_v d\tau$$

### Bilan global d'énergie électromagnétique

Le bilan d'énergie électromagnétique sur un volume  $\mathcal{V}$  fixe, engendré par une surface fermée  $\mathcal{S}$  s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left( \underbrace{\iiint_{M \in \mathcal{V}_S} u_{em}(M, t) d\tau}_{\text{stockage}} \right) = - \underbrace{\oint_{M \in \mathcal{S}} \vec{\Pi}(M, t) \cdot d\vec{S}_{ext}}_{\text{transport}} - \underbrace{\iiint_{M \in \mathcal{V}_S} p_v(M, t) d\tau}_{\text{conversion}}$$

où le flux du vecteur de POYNTING à travers une surface ( $\Sigma$ ) :

$$\mathcal{P}(t) = \iint_{M \in (\Sigma)} \vec{\Pi}(M, t) \cdot d\vec{S}(M)$$

représente la puissance transportée (ou rayonnée) par l'onde électromagnétique à travers la surface ( $\Sigma$ ), comptée positivement dans le sens de  $d\vec{S}(M)$ .

#### 4.3.2 Equation locale de Poynting

Stockage :  $\frac{d}{dt} \iiint_V u_{em} d\tau = \iiint_V \frac{\delta u_{em}}{\delta t} d\tau$

Transport :  $\oint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}_{ext} = \iiint_V \text{div} \vec{\Pi} d\tau$  (th. de G. O.)

$$\iiint_V \left( \frac{\delta u_{em}}{\delta t} + \text{div} \vec{\Pi} + p_v \right) d\tau = 0 \quad \text{mais ceci est vrai } \forall V$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\delta u_{em}}{\delta t} + \text{div} \vec{\Pi} + p_v = 0}$$

Remarque : On observe ici une équation proche de celle la conservation de la charge, sauf qu'ici l'énergie peut-être produite ou détruite

## 4.3.3 Formules explicites de la densité d'énergie électromagnétique et du vecteur de Poynting

Considérons le champ électromagnétique  $\{\vec{E}(M, t); \vec{B}(M, t)\}$  créé par la distribution de charge et de courant  $\{\rho(M, t); \vec{j}(M, t)\}$ .

$$\text{M.F.} \quad \text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$$

$$\text{M.A.} \quad \text{rot } \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\vec{B} \cdot (\text{M.F.}) - \vec{E} \cdot (\text{M.A.})$$

$$\vec{B} \cdot \text{rot } \vec{E} + \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{B} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\mu_0 \vec{j} \cdot \vec{E}$$

$$\frac{\vec{B} \cdot \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{B}}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\underbrace{\frac{\vec{B} \cdot \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{B}}{\mu_0}}_{\text{div} \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right)} + \underbrace{\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \right)} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$$

On identifie :  $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

$$u_{em} = \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

$$p_v = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

### Bilan local d'énergie électromagnétique

Le bilan locale d'énergie électromagnétique s'écrit :

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t}(M, t) + \operatorname{div} \vec{\Pi}(M, t) = -p_v(M, t) = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

Cette équation est également appelée l'**équation locale de POYNTING** Elle fait intervenir :

- la **densité volumique d'énergie électromagnétique**

$$u_{em}(M, t) = \frac{\varepsilon_0 E^2(M, t)}{2} + \frac{B^2(M, t)}{2\mu_0} \quad (\text{unité : J.m}^{-3})$$

- le **vecteur de POYNTING** (unité :  $W \cdot m^{-2}$ ) :

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)}{\mu_0} \quad (\text{unité : W.m}^{-2})$$

Ce vecteur correspond au vecteur densité surfacique de puissance rayonnée tel que l'énergie électromagnétique  $\delta U_{em}(M, t)$  traversant la surface infinitésimale  $d\vec{S}_{1 \rightarrow 2}(M)$  centrée sur M, comptée positivement de ① vers ②, entre les dates  $t$  et  $t + dt$  s'écrit :

$$\delta U_{em}(M, t) = \vec{\Pi}(M, t) \cdot d\vec{S}_{1 \rightarrow 2}(M) dt$$

