

# ÉLECTROMAGNÉTISME 2 :

## Ondes électromagnétiques dans le vide

École Centrale Pékin

2020-2021

### Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Équation de propagation des champs dans le vide</b>	<b>3</b>
2.1	Équation de MAXWELL dans le vide en l'absence de charges et de courants . . . . .	3
2.2	Équations de propagation du champ électromagnétique . . . . .	4
2.3	Recherche de solution de l'équation de propagation . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Une famille de solutions : les ondes planes progressives (O.P.P.)</b>	<b>6</b>
3.1	Définition d'une onde plane . . . . .	6
3.2	Solutions en ondes planes progressives (O.P.P.) . . . . .	7
3.3	Relations de structure de l'O.P.P. . . . .	8
3.4	Réalité physique d'une O.P.P. . . . .	9
<b>4</b>	<b>Une famille de solutions : les ondes planes progressives harmoniques (O.P.P.H.)</b>	<b>10</b>
4.1	Définition . . . . .	10
4.2	Relation de dispersion . . . . .	10
4.3	Double périodicité . . . . .	11
4.4	Réalité physique d'une O.P.P.H. . . . .	11
4.5	Notation complexe . . . . .	11
4.6	Relations de structure de l'O.P.P.H. . . . .	15
4.7	Aspect énergétique de la propagation des O.P.P.H. électromagnétiques dans le vide . .	17
<b>5</b>	<b>Polarisation des ondes électromagnétiques</b>	<b>19</b>
5.1	État de polarisation des O.P.P.H. . . . .	19
5.2	Illustration d'une O.P.P.H polarisée rectilignement . . . . .	22

## 1 Introduction

On montrera dans le chapitre 3 que les sources d'ondes électromagnétiques sont des charges en mouvement, qui oscillent. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons aux ondes électromagnétiques se propageant dans le vide, loin des sources. On suppose dans tout ce chapitre que l'espace est **vide de charge et de courant** avec :

$$\rho(M, t) = 0 \quad \text{et} \quad \vec{j}(M, t) = \vec{0}$$

mais qu'il existe un champ électromagnétique, créé donc par des charges et des courants situés en dehors de la zone étudiée.

Le tableau ci-dessous présente un classement des ondes électromagnétiques selon leur domaine de fréquence  $f$ . Dans chaque cas, sont présentés le nom de la bande de fréquence, le domaine de fréquence  $f$ , le domaine de longueur d'onde dans le vide  $\lambda = c/f$  et des exemples d'application.

Bandes	$f$	$\lambda$	Exemples d'applications
Super Low Frequency (SLF)	30 à 300 Hz	$10^4$ à $10^3$ km	Réseau électrique
Medium Frequency (MF)	300 kHz à 3 MHz	1000 à 100 m	Radionavigation
High Frequency (HF)	3 à 30 MHz	100 à 10 m	Radiodiffusion
Ultra High Frequency (UHF)	300 MHz à 30 GHz	1 m à 1 cm	Wi-Fi, Four à micro-ondes Spectroscopie rotationnelle pure
Extremely High Frequency (EHF)	30 à 300 GHz	1 cm à 1 mm	Faisceau hertzien
Infrarouge (IR)	300 à 384 GHz	1 mm à 780 nm	Spectroscopie vibrationnelle
Spectre visible	384 à 789 THz	780 à 380 nm	Spectroscopie électronique
Proche Ultra Violet (UV)	850 à 952 THz	400 à 315 nm	UVA
Ultra Violet lointain	952 à 1071 THz	315 à 200 nm	UVB
Ultra Violet du Vide (VUV)	$1,5 \times 10^{15}$ à $3 \times 10^{17}$ Hz	200 à 10 nm	Spectroscopie de photoionisation
Rayons X	$3 \times 10^{17}$ à $3 \times 10^{20}$ Hz	10 nm à 10 pm	Spectroscopie Auger
Rayons $\gamma$	$3 \times 10^{20}$ à $3 \times 10^{25}$ Hz	10 à 1 pm	Spectroscopie de noyaux atomiques

TABLE 1 – Domaines électromagnétiques, définitions et exemples d'applications

La figure 1 représente l'ensemble du spectre électromagnétique en fonction de la longueur d'onde dans le vide  $\lambda$  ou de la fréquence  $f$ . En dessous, on a donné les sources typiques de ces ondes.

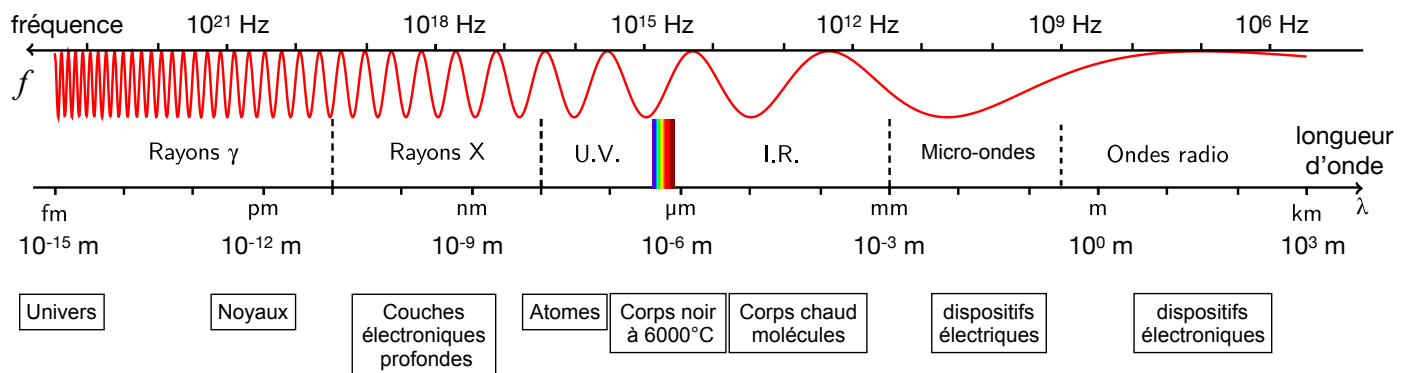


FIGURE 1 – Spectre électromagnétique

Dans le domaine visible, une longueur d'onde donnée correspond à une couleur déterminée (cf figure 2) : c'est là l'origine du qualificatif **monochromatique** donné à ces ondes. Le domaine visible est étroit et s'étend de 400 nm (bleu/violet) à 800 nm (rouge).

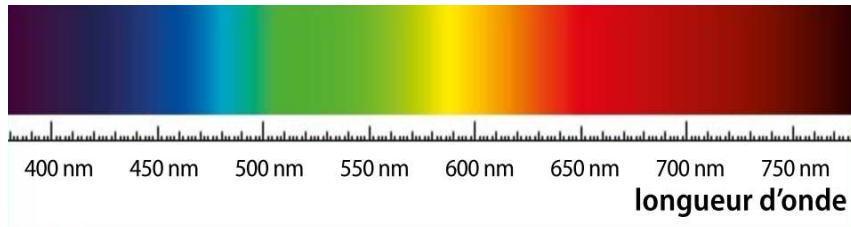


FIGURE 2 – Spectre visible

## 2 Équation de propagation des champs dans le vide

### 2.1 Équation de MAXWELL dans le vide en l'absence de charges et de courants

#### Les quatre équations de MAXWELL dans le vide

Dans un domaine  $\mathcal{D}$  dépourvu de charges ( $\rho(M, t) = 0$ ) et de courants ( $\vec{j}(M, t) = \vec{0}$ ), les équations de MAXWELL dans le vide s'écrivent :

- ① Équation de MAXWELL-GAUSS
- ② Équation de MAXWELL-flux
- ③ Équation de MAXWELL-FARADAY
- ④ Équation de MAXWELL-AMPÈRE

## 2.2 Équations de propagation du champ électromagnétique

**Équation de propagation des ondes électromagnétiques :** En l'absence de charges et de courants, les champs électrique  $\vec{E}(M, t)$  et magnétique  $\vec{B}(M, t)$  sont régis par la même équation dite **équation de d'ALEMBERT tridimensionnelle** :

$$\boxed{\vec{\Delta} \vec{E}(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}(M, t) = \vec{0}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{\Delta} \vec{B}(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}(M, t) = \vec{0}}$$

avec  $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$  où  $c$  représente la vitesse de propagation de l'onde électromagnétique dans le vide :  $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

**Remarque :** les potentiels scalaires  $V(M, t)$  et vecteur  $\vec{A}(M, t)$  vérifient une équation du même type (équation de d'ALEMBERT) dans la jauge le LORENTZ.

## 2.3 Recherche de solution de l'équation de propagation

Un champ vectoriel  $\vec{u}(M, t)$  vérifie l'équation de d'ALEMBERT si et seulement si ses trois composantes  $u_x(M, t)$ ,  $u_y(M, t)$  et  $u_z(M, t)$  (en coordonnées cartésiennes ici dans la base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ ) vérifient l'équation de d'ALEMBERT car :

$$\vec{\Delta} \vec{u}(M, t) = \Delta u_x(M, t) \vec{e}_x + \Delta u_y(M, t) \vec{e}_y + \Delta u_z(M, t) \vec{e}_z$$

avec pour chaque composante  $i = \{x, y, z\}$  on a :  $\Delta u_i(M, t) = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}(M, t) + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}(M, t) + \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2}(M, t)$

Dans le cas unidimensionnel, étudié dans le cours de **PHYSIQUE DES ONDES**, le champ  $u(x, t)$  est scalaire et ne dépend que d'une variable d'espace. L'équation de d'ALEMBERT unidimensionnelle s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = 0$$

et les solutions sont de la forme de la superposition de deux ondes progressives se propageant à la vitesse  $c$  dans deux directions opposées :

$$u(x, t) = \underbrace{f(x - ct)}_{x \text{ croissant}} + \underbrace{g(x + ct)}_{x \text{ décroissant}}$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions quelconques deux fois dérivables. La solution peut également se mettre sous la forme :

$$u(x, t) = F\left(t - \frac{x}{c}\right) + G\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

où  $F$  et  $G$  sont des fonctions quelconques deux fois dérivables.

Inspirons-nous de ce cas unidimensionnel pour déterminer des solutions dans le cas tridimensionnel.

## 3 Une famille de solutions : les ondes planes progressives (O.P.P.)

### 3.1 Définition d'une onde plane

#### • Surface d'onde

**Définition :** Soit  $\vec{\Psi}(M, t)$  une onde. On appelle **surface d'onde**  $\mathcal{S}_{\vec{\Psi}_0, t_0}$ , le lieu des points contigus (voisins)  $M$  tels que pour  $t_0$  fixé,  $\vec{\Psi}(M, t_0) = \vec{\Psi}_0$ .

#### • Onde plane

**Définition :** On dit qu'une onde (scalaire ou vectorielle) est **plane** si les surfaces d'onde sont des plans<sup>a</sup> nommés **plans d'onde**.

<sup>a</sup> nécessairement parallèles car si deux d'entre eux s'intersectaient, le champ prendrait deux valeurs différentes en un même point et à la même date (absurde).

La **direction et le sens de propagation** de l'onde sont définis par le vecteur unitaire  $\vec{n}$  orthogonal aux plans et orienté dans le sens de propagation de l'onde.

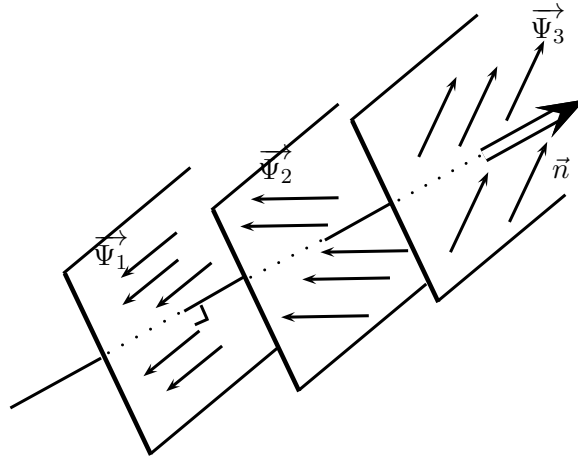


FIGURE 3 – Onde vectorielle  $\vec{\Psi}(M, t_0)$  plane (dans le cas particulier *transverse*)

Les plans d'onde au point  $M$  ont des équations de la forme  $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{n} = \text{constante}$ , où  $O$  est un point origine. Ainsi une onde plane dépend uniquement du temps et de  $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{n}$  qui est la coordonnée de  $M$  sur l'axe  $(O\vec{n})$ . Dans un repère cartésien tel que  $\vec{n} = \vec{e}_x$ , elle ne dépend que de la coordonnée  $x$  et du temps  $t$ .

### 3.2 Solutions en ondes planes progressives (O.P.P.)

Soit une onde  $\vec{F}(M, t)$  régie par l'équation de d'Alembert tridimensionnelle :

$$\Delta \vec{F}(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2}(M, t) = \vec{0}$$

Une solution particulière est la superposition de deux ondes planes progressives (O.P.P.) l'une se propageant selon  $+\vec{n}$ , l'autre selon  $-\vec{n}$  :

$$\vec{F}(M, t) = \vec{F}_1(\overrightarrow{OM} \cdot \vec{n} - ct) + \vec{F}_2(\overrightarrow{OM} \cdot \vec{n} + ct) \quad a$$

où  $\alpha \rightarrow \vec{F}_1(\alpha)$  et  $\beta \rightarrow \vec{F}_2(\beta)$  sont deux fonctions vectorielles quelconques. <sup>b</sup>

a. On peut aussi écrire, de manière équivalente,  $\vec{F}(M, t) = \vec{G}_1\left(\frac{\overrightarrow{OM} \cdot \vec{n}}{c} - t\right) + \vec{G}_2\left(\frac{\overrightarrow{OM} \cdot \vec{n}}{c} + t\right)$ .

b. L'ensemble des solutions est obtenu en faisant la somme (continue) d'O.P.P. de direction  $\vec{n}$  différentes.

*Démonstration.* :

Sans perte de généralité, choisissons le repère  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  tel que  $\vec{n} = \vec{e}_x$ . Alors :

$$\vec{F}(M, t) = \underbrace{\vec{F}_1(\overrightarrow{OM} \cdot \vec{n} - ct)}_{\vec{F}_1(x-ct)} + \underbrace{\vec{F}_2(\overrightarrow{OM} \cdot \vec{n} + ct)}_{\vec{F}_2(x+ct)} = \vec{F}(x, t)$$

de sorte que  $\vec{F}(M, t)$  est solution de  $\Delta \vec{F}(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2}(M, t) = \vec{0}$  si et seulement si  $\vec{F}(x, t)$  est

solution de  $\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x^2}(x, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2}(x, t) = \vec{0}$

Or, on a bien démontré dans PHYSIQUE DES ONDES 1 que  $\vec{F}(x, t) = \vec{F}_1(x - ct) + \vec{F}_2(x + ct)$  était solution de l'équation de d'Alembert à une dimension.  $\square$

### 3.3 Relations de structure de l'O.P.P.

**Relation de structure d'une O.P.P électromagnétique :**

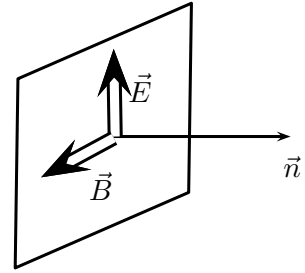
- Si  $\vec{E}(M, t)$  (respectivement  $\vec{B}(M, t)$ ) est une O.P.P. se dirigeant selon  $\vec{n}$  alors  $\vec{B}(M, t)$  (respectivement  $\vec{E}(M, t)$ ) est une O.P.P. se dirigeant selon  $\vec{n}$ .
- Dans ces conditions, l'O.P.P. électromagnétique  $(\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t))$  vérifie alors :

$$\boxed{\vec{E}(M, t) \cdot \vec{n} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{B}(M, t) \cdot \vec{n} = 0}$$

et la **relation de structure** de l'O.P.P. :

$$\boxed{\vec{B}(M, t) = \frac{\vec{n} \wedge \vec{E}(M, t)}{c} \Leftrightarrow \vec{E}(M, t) = c(\vec{B}(M, t) \wedge \vec{n})}$$

- Ces relations montrent que, pris dans cet ordre,  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{n})$  forme un trièdre direct. Les composantes électrique et magnétique de l'O.P.P électromagnétique sont dites **transverses** car elle sont orthogonales à la direction de propagation.



**Illustration :**

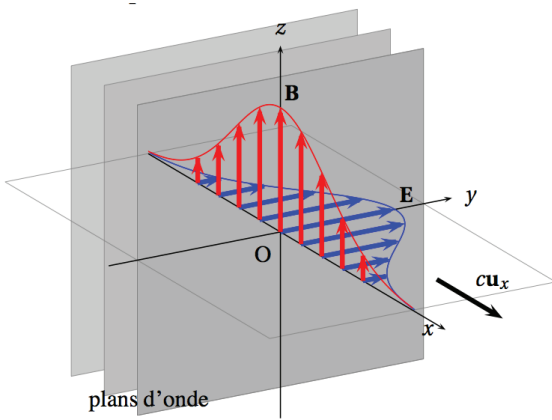


FIGURE 4 – Propagation d'une O.P.P.

On considère, pour visualiser une situation concrète, le cas d'une onde se propageant selon  $Ox$  où :

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \exp \left[ -\frac{(t - \frac{x}{c})^2}{t_0^2} \right] \vec{e}_y$$

$$\vec{B}(x, t) = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c} \exp \left[ -\frac{(t - \frac{x}{c})^2}{t_0^2} \right] \vec{e}_z$$

Ce cas (cf. figure 4) correspond à la propagation d'une impulsion avec un champ électrique contenu dans le plan  $xOy$  et donc un champ magnétique contenu dans le plan  $xOz$ . Les surfaces d'ondes sont des plans perpendiculaires à  $Ox$ .



### 3.4 Réalité physique d'une O.P.P.

L'O.P.P. électromagnétique est un modèle idéalisé à la géométrie extrêmement simple. Dans la réalité l'onde émise par un émetteur est beaucoup plus complexe. Cependant, si l'on s'intéresse à l'onde loin de l'émetteur, c'est-à-dire à une distance grande devant la taille de l'émetteur, on peut assimiler celui-ci, à une source quasi-ponctuelle en  $O$  (cf figure 5).

Dans ce cas, l'onde est naturellement décrite en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  de centre  $O$  et elle dépend peu des angles  $\theta$  et  $\varphi$ . Si de plus on restreint le domaine d'étude à un petit volume autour d'un point  $M_0$  de coordonnées  $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$  (la taille du volume doit être petite devant  $r_0$ ) on peut dans le calcul de l'onde faire les approximations :

$$r = \vec{e}_r \cdot \vec{OM} \approx \vec{e}_{r_0} \cdot \vec{OM} \quad \theta \approx \theta_0 \quad \varphi \approx \varphi_0$$

en notant  $\vec{e}_{r_0}$  le vecteur radial en  $M_0$ . Dans cette approximation, les champs de l'onde en  $M$  ne dépendent plus que de  $\vec{e}_{r_0} \cdot \vec{OM}$  : c'est quasiment une onde plane progressive se propageant dans la direction  $\vec{e}_{r_0}$ .

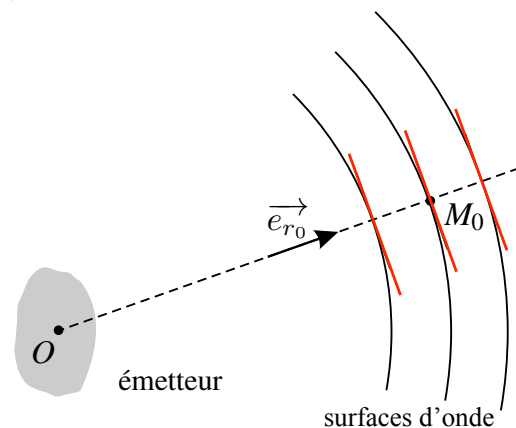


FIGURE 5 – Approximation locale par une onde plane : les plans d'onde sont tangents aux surfaces d'onde réelles

## 4 Une famille de solutions : les ondes planes progressives harmoniques (O.P.P.H.)

### 4.1 Définition

**Définition :** Une **onde plane progressive harmonique** (O.P.P.H.)<sup>a</sup> se dirigeant dans le sens et la direction de  $\vec{n}$  est une onde plane progressive de forme particulière :

- si le champ est **scalaire** alors :

$$f(M, t) = f_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi)$$

- si le champ est **vectorel**, ses trois composantes cartésiennes sont des O.P.P.H. de même pulsation  $\omega$  et de même vecteur d'onde  $\vec{k} = \|\vec{k}\| \vec{n}$  :

$$\vec{E}(M, t) = \begin{cases} E_{0x} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi_x) \\ E_{0y} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi_y) \\ E_{0z} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi_z) \end{cases}$$

a. appelée aussi **onde plane progressive monochromatique** (O.P.P.M.).

### 4.2 Relation de dispersion

Pour une O.P.P.H. solution de l'équation de d'Alembert tridimensionnelle, la **relation de dispersion** suivante est vérifiée :

$$\|\vec{k}\| = \frac{\omega}{c}$$

### 4.3 Double périodicité

Sans perte de généralité, si nous choisissons  $\vec{e}_x$  tel que  $\vec{k} = k\vec{e}_x$  ( $k > 0$ ) alors  $\vec{E}(M, t) = \vec{E}(x, t)$ .

L'O.P.P.H. possède une double périodicité :

- **période temporelle** :  $t \rightarrow \vec{E}(x, t)$  est périodique de période  $T$  avec  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$  ;  $T$  est la *période* (unité : s),  $f$  la *fréquence* (unité : Hz) et  $\omega$  la *pulsation* (unité :  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ).
- **période spatiale** :  $x \rightarrow \vec{E}(x, t)$  est périodique de période  $\lambda$  avec  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\sigma$ .  $k$  est la *norme du vecteur d'onde* (unité :  $\text{m}^{-1}$ ),  $\lambda$  la *longueur d'onde* (unité : m) et  $\sigma$  le *nombre d'onde* (unité :  $\text{m}^{-1}$ ).

La relation de dispersion permet de relier les périodes spatiale et temporelle :

$$k = \frac{\omega}{c} \Leftrightarrow \lambda = cT$$

### 4.4 Réalité physique d'une O.P.P.H.

On a déjà vu qu'une **onde plane** est une approximation lorsque l'émetteur est loin et que l'on regarde l'onde dans un petit volume centré sur M. De plus, une **progressive harmonique** est dénuée de réalité physique car elle est éternelle, d'extension spatiale infinie et donc transporte une énergie électromagnétique infinie.

**Ainsi une O.P.P.H. n'a pas de réalité physique : c'est la somme continue et sur la pulsation  $\omega$ , et sur la direction  $\vec{n}$  d'O.P.P.H. qui en possède une.**

### 4.5 Notation complexe

#### 4.5.1 Introduction de la notation complexe - intérêt

À toute O.P.P.H.  $\vec{E}(M, t)$ , on peut associer le champ complexe instantané :

$$\underline{\vec{E}}(M, t) = \underline{\vec{E}}_0 \exp [i (\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$$

où les composantes de  $\underline{\vec{E}}_0$  sont des complexes.

On a alors  $\vec{E}(M, t) = \text{Re}(\underline{\vec{E}}(M, t))$

**⚠** La notation  $\underline{\vec{E}}(M, t) = \underline{\vec{E}}_0 \exp [i (\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$  n'est pas universelle ! Un exercice ou un autre cours pourra plutôt choisir de définir  $\underline{\vec{E}}(M, t) = \underline{\vec{E}}_0 \exp [-i (\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$ .

L'O.P.P.H.  $\vec{E}(M, t)$  est solution de l'équation de d'Alembert tridimensionnelle :

$$\Delta \vec{E}(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}(M, t) = \vec{0}$$

si et seulement si l'onde complexe associée  $\underline{\vec{E}}(M, t)$  est solution de la même équation :

$$\Delta \underline{\vec{E}}(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2}(M, t) = \vec{0}$$

De manière générale, l'O.P.P.H.  $\vec{E}(M, t)$  est solution d'une équation d'onde **linéaire** à **coefficients réels indépendants du temps**  $t$  si et seulement si l'onde complexe associée  $\underline{\vec{E}}(M, t)$  est solution de la même équation.

#### 4.5.2 Opérateurs différentiels appliqués aux O.P.P.H.

On considère une O.P.P.H. :

- soit **scalaire** avec la convention :  $\underline{F}(M, t) = F_0 \exp [i (\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$  ;
- soit **vectorielle** avec la convention :  $\vec{\underline{E}}(M, t) = \vec{E}_0 \exp [i (\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$ .

On note  $\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z$ .

#### Opérateurs en notation complexe appliqués aux O.P.P.H.

##### • Opérateurs différentiels du premier ordre

— Pour les O.P.P.H. scalaires et vectorielles :

$$\frac{\partial \vec{\underline{E}}(M, t)}{\partial t} = i\omega \vec{\underline{E}}(M, t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{\underline{E}}(M, t)}{\partial x} = -ik_x \vec{\underline{E}}(M, t)$$

— Pour les O.P.P.H. scalaires :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\underline{F}(M, t)) = \vec{\nabla} \underline{F}(M, t) = -i \vec{k} \underline{F}(M, t)$$

— Pour les O.P.P.H. vectorielles :

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{\underline{E}}(M, t)) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{\underline{E}}(M, t) = -i \vec{k} \cdot \vec{\underline{E}}(M, t) \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{\underline{E}}(M, t)) &= \vec{\nabla} \wedge \vec{\underline{E}}(M, t) = -i \vec{k} \wedge \vec{\underline{E}}(M, t) \end{aligned}$$

##### • Opérateurs différentiels du second ordre

— Pour les O.P.P.H. scalaires et vectorielles :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{\underline{E}}(M, t)}{\partial t^2} &= (i\omega)^2 \vec{\underline{E}}(M, t) = -\omega^2 \vec{\underline{E}}(M, t) \\ \frac{\partial^2 \vec{\underline{E}}(M, t)}{\partial x^2} &= (-ik_x)^2 \vec{\underline{E}}(M, t) = -k_x^2 \vec{\underline{E}}(M, t) \end{aligned}$$

— Pour les O.P.P.H. scalaires :

$$\Delta \underline{F}(M, t) = (-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2) \underline{F}(M, t) = -k^2 \underline{F}(M, t)$$

— Pour les O.P.P.H. vectorielles :

$$\vec{\Delta} \vec{\underline{E}}(M, t) = -k^2 \vec{\underline{E}}(M, t)$$

**⚠** Ces relations ont été établies si la partie spatio-temporelle de l'onde s'écrit  $\exp [i (\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$ , il faut transformer  $i$  en  $-i$  dans les résultats si on a opté pour la convention  $\exp [-i (\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$  : cela modifie les opérateurs différentiels du premier ordre, pas du second ordre.

### 4.5.3 Équation de MAXWELL en notation complexe

Soit une O.P.P.H. électromagnétique associée aux complexes :  $\underline{\vec{E}}(M, t) = \underline{\vec{E}}_0 \exp [i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$  et  $\underline{\vec{B}}(M, t) = \underline{\vec{B}}_0 \exp [i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$ .

#### Les équations de MAXWELL dans le vide pour une O.P.P.H. complexe

- |                               |   |
|-------------------------------|---|
| ① Équation de MAXWELL-GAUSS   | $i \vec{k} \cdot \underline{\vec{E}}(M, t) = 0$   |
| ② Équation de MAXWELL-flux    | $i \vec{k} \cdot \underline{\vec{B}}(M, t) = 0$   |
| ③ Équation de MAXWELL-FARADAY | $i \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}(M, t) = i\omega \underline{\vec{B}}(M, t)$                    |
| ④ Équation de MAXWELL-AMPÈRE  | $i \vec{k} \wedge \underline{\vec{B}}(M, t) = -i\omega\mu_0\varepsilon_0 \underline{\vec{E}}(M, t)$ |

Les équations de MAXWELL sont indépendantes de la convention adoptée pour noter l'onde en complexe : en changeant  $i$  en  $-i$ , les changements de signes se compensent.

#### 4.6 Relations de structure de l'O.P.P.H.

On retrouve, mais de manière plus simple, les résultats établis dans le cadre plus général des O.P.P.

##### Relation de structure d'une O.P.P.H. électromagnétique :

• Si  $\vec{E}(M, t)$  (respectivement  $\vec{B}(M, t)$ ) est une O.P.P.H. se dirigeant selon  $\vec{n}$  alors  $\vec{B}(M, t)$  (respectivement  $\vec{E}(M, t)$ ) est une O.P.P.H. se dirigeant selon  $\vec{n}$ .

• Dans ces conditions, l'O.P.P.H. électromagnétique  $(\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t))$  dans le vide vérifie alors :

$$\boxed{\vec{E}(M, t) \cdot \vec{n} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{B}(M, t) \cdot \vec{n} = 0}$$

et la **relation de structure** de l'O.P.P.H. :

$$\boxed{\vec{B}(M, t) = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}(M, t)}{\omega} = \frac{\vec{n} \wedge \vec{E}(M, t)}{c} \Leftrightarrow \vec{E}(M, t) = c(\vec{B}(M, t) \wedge \vec{n})}$$

• Ces relations montrent que, pris dans cet ordre, l'O.P.P.H.  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{n})$  forme un trièdre direct. Les composantes électrique et magnétique de l'O.P.P.H. électromagnétique sont dites **transverses** car elle sont orthogonales à la direction de propagation.

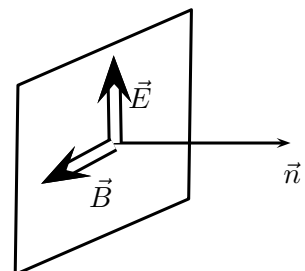


Illustration :

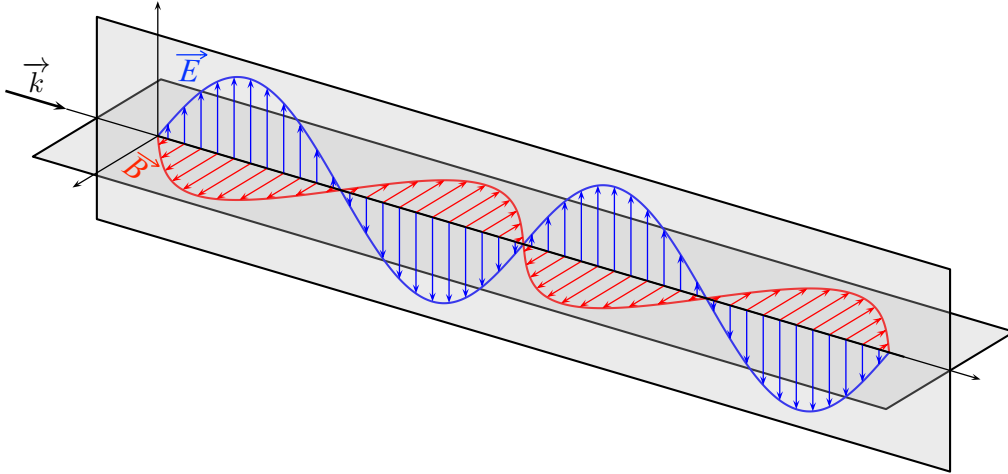


FIGURE 6 – Propagation d'une O.P.P.H.



## 4.7 Aspect énergétique de la propagation des O.P.P.H. électromagnétiques dans le vide

### 4.7.1 Grandeurs énergétiques d'une O.P.P.H. et vitesse de propagation de l'énergie d'une O.P.P.H.

Pour une O.P.P.H. électromagnétique  $(\vec{E}(M, t); \vec{B}(M, t))$  se propageant selon  $\vec{n}$ , on démontre que :

- la densité volumique d'énergie électromagnétique vaut :

$$u_{em,OPPH}(M, t) = \varepsilon_0 E^2(M, t) = \frac{B^2(M, t)}{\mu_0}$$

Il y a équipartition de l'énergie électrique et magnétique.

- le vecteur de POYNTING vaut  $\vec{\Pi}_{OPPH}(M, t) = c u_{em,OPPH}(M, t) \vec{n}$

Cette dernière relation traduit le fait que l'énergie d'une O.P.P.H. se déplace à la vitesse  $c \vec{n}$ .

### 4.7.2 Grandeur moyenne temporelle et notation complexe

**Théorème - Lien entre grandeurs moyennes temporelle et complexes :**  
Si  $\vec{E}(M, t)$  et  $\vec{B}(M, t)$  désignent les ondes complexes associées à des O.P.P.H., alors :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right]$$

$$\left\langle \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E}^* \right] \quad \text{et} \quad \left\langle \frac{B^2}{2\mu_0} \right\rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{B}^* \right].$$

**Définition : L'éclairement  $\mathcal{E}$**  est une grandeur proportionnelle à la valeur moyenne du vecteur de Poynting associé à l'onde, lui-même proportionnel à la valeur moyenne du carré du champ électrique. Il dépend du capteur utilisé pour le mesurer (sensibilité du capteur).

$$\mathcal{E}(M) \propto \langle \vec{E}^2(M, t) \rangle$$

### 4.7.3 Ordres de grandeur

- Par une journée de fort ensoleillement sous nos latitudes, le sol reçoit du Soleil une puissance surfacique d'environ  $1 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$ . Quelles sont les valeurs du champ électromagnétique associé ? Commenter.

- Soit l'émetteur parisien de Radio-Classique en haut de la tour EIFFEL de puissance moyenne  $P = 10 \text{ kW}$  avec une émission supposée isotrope. Quelles sont les valeurs du champ électromagnétique associé en bas de la tour et à une distance de  $10 \text{ km}$  ? Commenter.

## 5 Polarisation des ondes électromagnétiques

### 5.1 État de polarisation des O.P.P.H.

Des animations illustrant le paragraphe qui suit et qui seront présentées en cours, sont disponibles à l'adresse suivante :

<http://cddemo.szialab.org/index.html>

#### 5.1.1 Définition

**Définition** : Soit une O.P.P.H. électromagnétique se propageant dans le sens des  $x$  croissants :  $\vec{k} = k\vec{u}_x$  (où  $k > 0$ ). Le champ électrique étant transverse, son expression la plus générale est :

$$\vec{E}(M, t) \begin{cases} 0 \\ E_{0y} \cos(\omega t - kx) \\ E_{0z} \cos(\omega t - kx - \varphi) \end{cases}$$

Lorsqu'on observe un plan d'onde le **vecteur d'onde venant vers nous**, l'extrémité du vecteur champ électrique  $\vec{E}(M_0, t)$  décrit une courbe au cours du temps <sup>a</sup>. Si cette courbe est :

- un segment de droite, on dit que l'onde est **polarisée rectilignement** selon la direction du segment ;
- un cercle, on dit que l'onde est **polarisée circulairement** (**droite** si la courbe est décrite dans le sens horaire, **gauche** sinon) ;
- une ellipse, on dit que l'onde est **polarisée elliptiquement** (**droite** si la courbe est décrite dans le sens horaire, **gauche** sinon).

La nature de cette courbe dépend des valeurs relatives de  $E_{0y}$ ,  $E_{0z}$  et  $\varphi$ .

<sup>a</sup>. L'extrémité du vecteur champ magnétique  $\vec{B}(M_0, t)$  décrit la même courbe : on peut donc raisonner au choix soit sur le champ électrique, soit sur le champ magnétique.

#### 5.1.2 Polarisation rectiligne

Soit une onde électrique P.P.H. polarisée rectilignement représentée sur la figure 7.

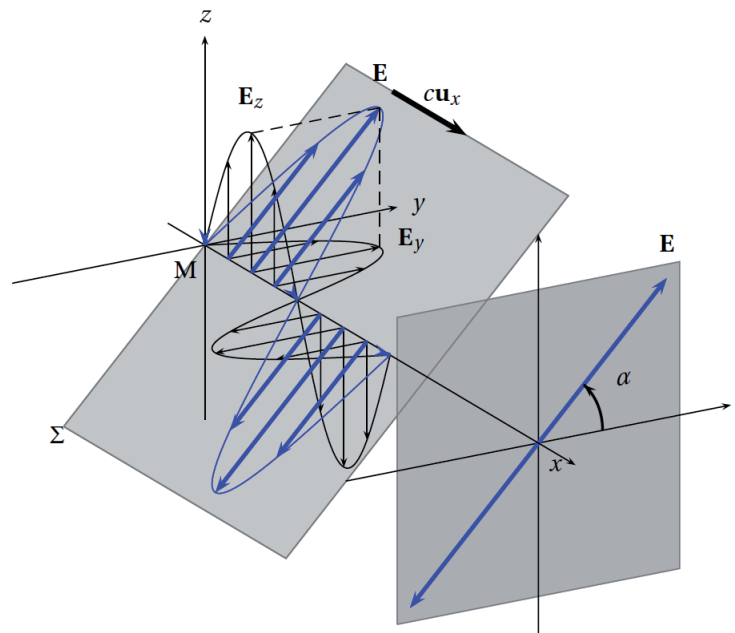


FIGURE 7 – O.P.P.H. électrique polarisée rectilignement

### 5.1.3 Polarisation circulaire

#### • Polarisation circulaire gauche

Soit une onde électrique P.P.H. polarisée circulairement gauche représentée sur la figure 8.

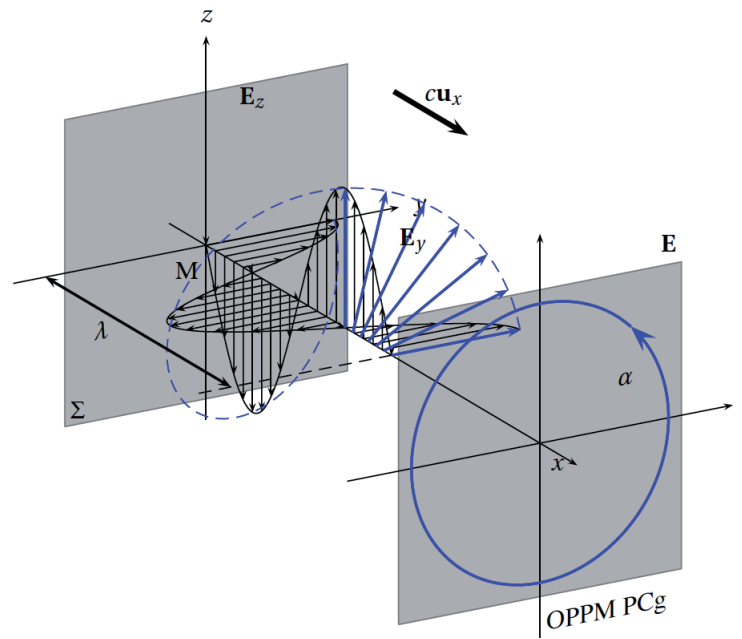


FIGURE 8 – O.P.P.H. électrique polarisée circulairement gauche

#### • Polarisation circulaire droite

Soit une onde électrique P.P.H. polarisée circulairement droite représentée sur la figure 9.

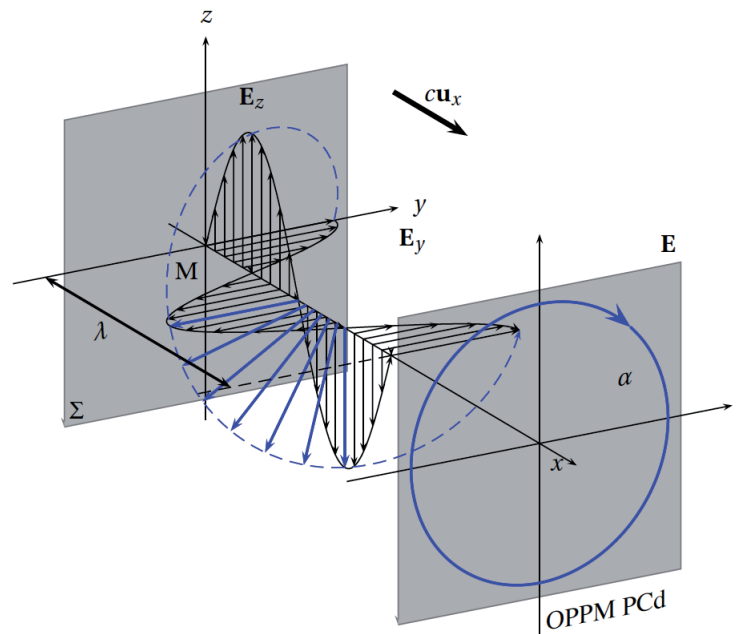


FIGURE 9 – O.P.P.H. électrique polarisée circulairement droite

### 5.1.4 Polarisation elliptique

• Définition :

**Définition :** L'expression la plus générale de l'onde électrique  $\vec{E}(M, t)$  plane progressive harmonique se dirigeant selon  $\vec{u}_x$  :

$$\vec{E}(M, t) \begin{cases} 0 \\ E_{0y} \cos(\omega t - kx) \\ E_{0z} \cos(\omega t - kx - \varphi) \end{cases}$$

correspond à une onde polarisée elliptiquement.

• **Sens de rotation :** Avec l'écriture précédente, pour obtenir le sens de rotation sur l'ellipse, il suffit de remarquer que  $E_y(x=0, t)$  est maximal pour  $t=0$  et que  $\frac{\partial E_z}{\partial t}(x=0, t=0) = E_{0z}\omega \sin \varphi$  : le sens de rotation dépend donc du signe de  $\sin \varphi$ .

• Polarisation elliptique gauche

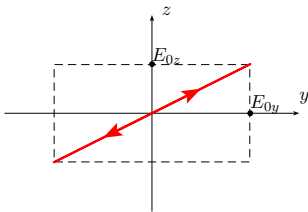


FIGURE 10 -  $\varphi = 0$

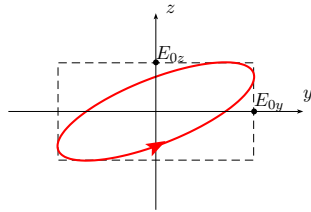


FIGURE 11 -  $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

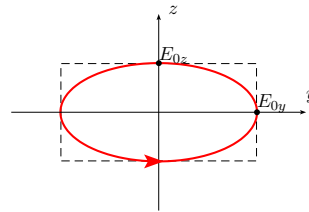


FIGURE 12 -  $\varphi = \frac{\pi}{2}$

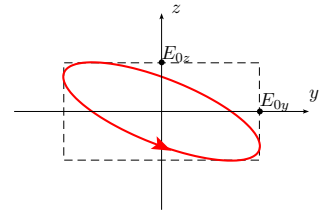


FIGURE 13 -  $\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$

• Polarisation elliptique droite

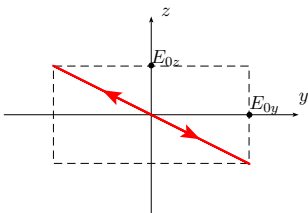


FIGURE 14 -  $\varphi = \pi$

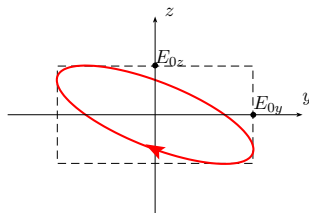


FIGURE 15 -  $\varphi \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$

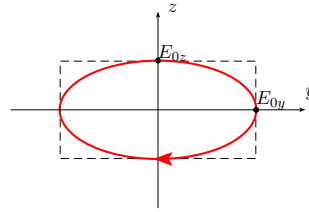


FIGURE 16 -  $\varphi = \frac{3\pi}{2}$

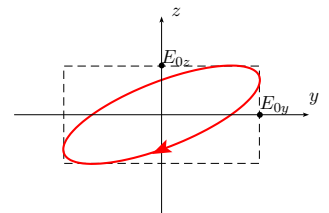


FIGURE 17 -  $\varphi \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

### 5.1.5 Caractère générique des polarisations rectilignes ou circulaires

• Caractère générique des polarisations rectilignes :

Le cas le plus général est la polarisation elliptique.

Toute onde électromagnétique P.P.H. polarisée elliptiquement est la somme de deux ondes électromagnétiques P.P.H. polarisée rectilignement dans des directions orthogonales.

En effet, une onde polarisée elliptiquement :

$$\vec{E}(M, t) = E_{0y} \cos(\omega t - kx - \varphi_y) \vec{u}_y + E_{0z} \cos(\omega t - kx - \varphi_z) \vec{u}_z$$

se décompose en la somme de deux ondes polarisées rectilignement dans des directions orthogonales :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_1(M, t) + \vec{E}_2(M, t)$$

où  $\vec{E}_1(M, t) = E_{0y} \cos(\omega t - kx - \varphi_y) \vec{u}_y$  et  $\vec{E}_2(M, t) = E_{0z} \cos(\omega t - kx - \varphi_z) \vec{u}_z$

Ainsi, toute onde électromagnétique dans le vide est une superposition d'ondes planes progressives harmoniques polarisées rectilignement. Cette dernière onde apparaît ainsi comme le maillon élémentaire de la théorie des ondes électromagnétiques dans le vide.

• **Décomposition d'une O.P.P.H. polarisée rectilignement en somme deux O.P.P.H polarisées circulairement :**

Toute onde électromagnétique P.P.H. polarisée rectilignement est la somme d'une onde électromagnétique P.P.H. polarisée circulairement droite et d'une d'une onde électromagnétique P.P.H. polarisée circulairement gauche de même amplitude.

En effet :

$$E_0 \cos(\omega t - kx - \varphi) \vec{u}_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \cos(\omega t - kx - \varphi) \\ E_0 \sin(\omega t - kx - \varphi) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \cos(\omega t - kx - \varphi) \\ -E_0 \sin(\omega t - kx - \varphi) \end{pmatrix}$$

Ainsi, toute onde électromagnétique dans le vide est aussi une superposition d'ondes planes progressives harmoniques polarisées circulairement : cette famille constitue un autre maillon élémentaire possible de la théorie des ondes électromagnétiques.

### 5.1.6 Cas de la lumière naturelle

La lumière naturelle est un rayonnement produit par un très grand nombre d'atomes et/ou de molécules qui émettent des trains d'ondes dont la polarisation (en général elliptique) varie aléatoirement d'une émission à l'autre. On dit que **la lumière naturelle est non polarisée**. Elle peut être représentée comme la superposition de deux ondes polarisées rectilignement selon deux directions perpendiculaires :

$$\vec{E}(M, t) \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y}(t) \cos(\omega t - kx - \varphi_y(t)) \\ E_{0z}(t) \cos(\omega t - kx - \varphi_z(t)) \end{pmatrix}$$

- les fonctions  $\varphi_y(t)$ ,  $\varphi_z(t)$ ,  $E_{0y}(t)$  et  $E_{0z}(t)$  prennent des valeurs constantes sur des intervalles de temps de durée  $\tau_c$  (temps de cohérence) ;
- les valeurs de  $\varphi_y(t)$  et  $\varphi_z(t)$  varient aléatoirement sur l'intervalle  $]-\pi; \pi[$  ;
- les valeurs de  $E_{0y}(t)$  et  $E_{0z}(t)$  sont aléatoires telles que  $\langle E_{0y}^2(t) \rangle = \langle E_{0z}^2(t) \rangle$  puisque  $Oy$  et  $Oz$  jouent des rôles équivalents.

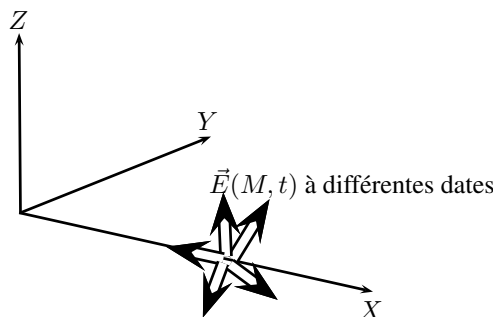


FIGURE 18 – Lumière naturelle

## 5.2 Illustration d'une O.P.P.H polarisée rectilignement

Une onde avec un état de polarisation quelconque peut être transformée en une onde polarisée rectilignement. Pour cela, il suffit d'absorber l'une des deux composantes du champ électrique d'un faisceau incident : c'est la polarisation par **dichroïsme**.

### 5.2.1 Polariseur

Pour polariser une onde rectilignement, on utilise un **polariseur**.

**Définition :** Un **polariseur** est un opérateur qui transforme l'onde entrante  $\vec{E}(M, t)$  en une onde polarisée rectilignement selon la direction de polarisation  $\vec{u}$  du polariseur :

$$\vec{E}(M_{\text{sortie}}, t) = [\vec{E}(M_{\text{entrée}}, t) \cdot \vec{u}] \vec{u}$$

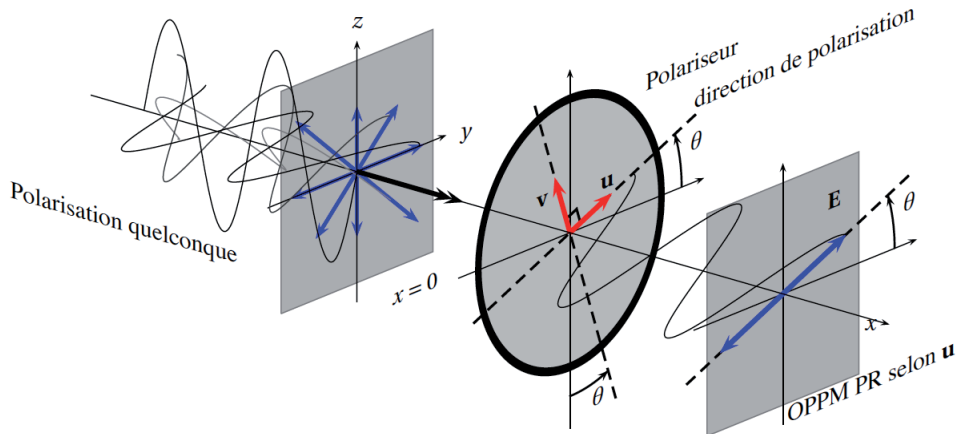


FIGURE 19 – Fonctionnement d'un polaroïd utilisé en polariseur

Le dispositif le plus simple pour construire un polariseur est une grille de fils conducteurs parallèles (cf. figure 20). Une onde électromagnétique de polarisation quelconque arrive sur la grille : on décompose le champ électrique en deux polarisations orthogonales, l'une étant parallèle aux fils et l'autre perpendiculaire à ceux-ci. La composante  $y$  du champ est absorbée (mise en mouvement des électrons de conduction le long de chaque fil) mais la composante  $x$  (car les électrons ne sont pas libres de se propager selon  $x$ ). Ainsi, seule la composante  $x$  traverse le polariseur : **l'axe de transmission de la grille est perpendiculaire aux fils.**

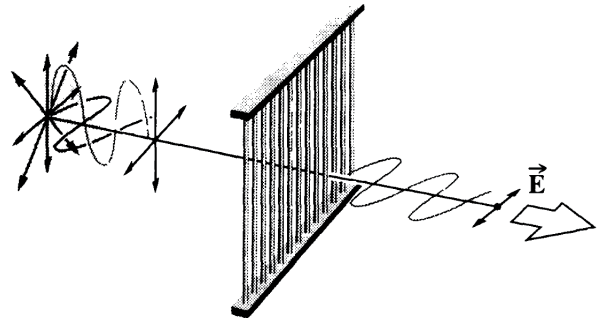


FIGURE 20 – Polariseur à grille

Un polariseur est une feuille constituée de polymères étirés parallèlement et rendus conducteurs : les fils de polymères conducteurs jouent le rôle des fils conducteurs de la figure 20.

### 5.2.2 Analyseur

Pour analyser une onde polarisée rectilignement on utilise un autre polariseur.

**Définition :** Un **analyseur** est un polariseur qui sert à analyser la lumière incidente c'est-à-dire à déterminer sa polarisation.

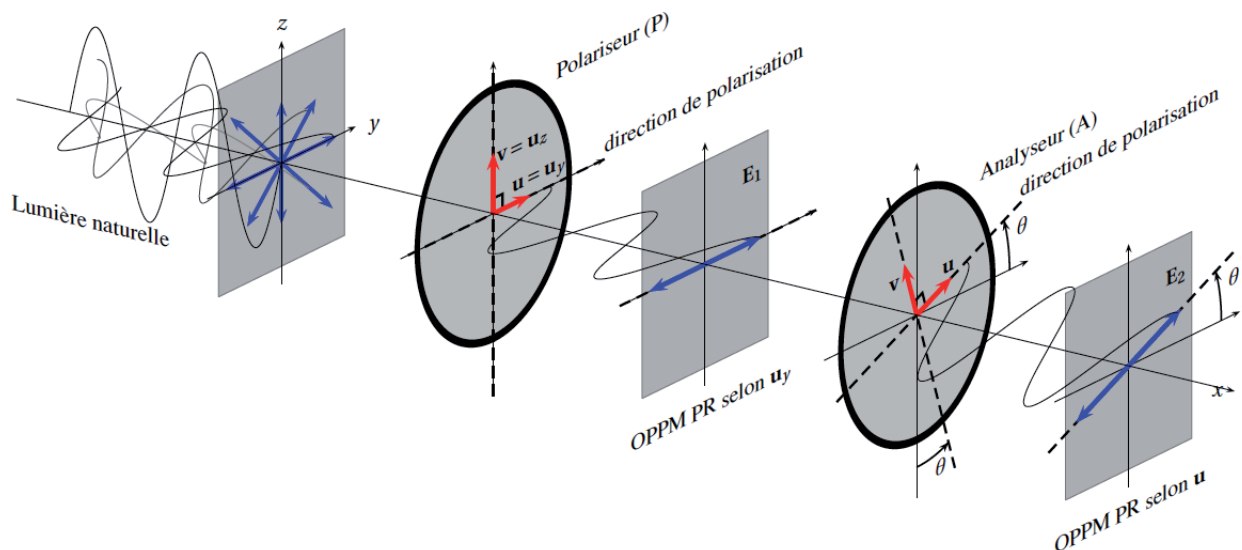


FIGURE 21 – Dispositif expérimental permettant de déterminer une polarisation

La composante du champ électrique sélectionné par le premier polariseur est ensuite projetée sur la direction de l'axe de l'analyseur. L'éclairement de l'onde sortante est donc liée avec l'angle  $\theta$  entre les axes du polariseur et de l'analyseur. Si polariseur et analyseur sont **croisés** (axes orthogonaux) alors on a extinction de l'onde sortante.

**Théorème - Loi de Malus :** Soient  $\mathcal{E}_{\text{analyseur}}$  l'éclairement en sortie de l'analyseur et  $\mathcal{E}_{\text{polariseur}}$  l'éclairement en sortie du polariseur. Si  $\theta$  désigne l'angle entre la direction de polarisation du polariseur et de l'analyseur alors on démontre la *loi de Malus* :

$$\mathcal{E}_{\text{analyseur}} = \mathcal{E}_{\text{polariseur}} \cos^2 \theta$$