
TRAVAUX DIRIGÉS D'ÉLECTROMAGNÉTISME 1 :

Révisions et postulats de l'électromagnétisme

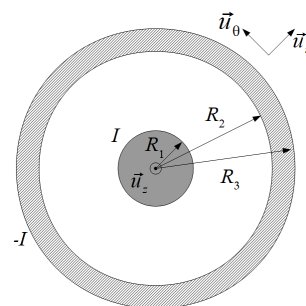
École Centrale Pékin

2020-2021

APPLICATION DU COURS

EXERCICE 1 : Câble coaxial

On considère un câble coaxial (voir figure) cylindrique de longueur supposée infinie, constitué d'un conducteur central plein de rayon R_1 , parcouru par un courant uniforme d'intensité I selon \vec{u}_z et d'un conducteur périphérique évidé, de rayon intérieur R_2 , de rayon extérieur R_3 avec $R_1 < R_2 < R_3$ et parcouru par un courant uniforme également d'intensité $-I$. On travaillera en coordonnées cylindriques. On note alors \vec{u}_z le vecteur directeur unitaire de l'axe commun aux deux conducteurs. Soit un point M situé à une distance r de l'axe du câble.



1. Après avoir étudié les symétries et invariances du système, donner la direction du champ magnétique \vec{B} en tout point en dehors de l'axe et sa dépendance en fonction des coordonnées du problème. Préciser la forme des lignes de champ.
2. Montrer que le champ magnétique \vec{B} créé au point M est nul si $r > R_3$. Quel est l'intérêt d'utiliser un câble coaxial à la place d'un simple fil parcouru par un courant de même intensité ?
3. Calculer les densités de courant \vec{j}_1 et \vec{j}_2 respectivement du conducteur central et du conducteur périphérique en fonction des courants I_1 et I_2 et des rayons R_1, R_2 et R_3 .
4. Calculer $\vec{B}(r)$ dans les trois cas suivants :
 - $r < R_1$,
 - $R_1 < r < R_2$, et
 - $R_2 < r < R_3$.
5. Tracer $B(r)$.

EXERCICE 2 : Modèle de l'atome d'hydrogène

L'atome d'hydrogène est l'élément le plus simple du tableau périodique. Il est constitué d'un noyau contenant un proton et d'un électron. On considère une distribution de charge à symétrie sphérique créant le potentiel électrostatique V tel que :

$$V(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\exp(-\frac{r}{a})}{r} \quad (1)$$

où

- $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C, la charge élémentaire,
- $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F·m⁻¹, la permittivité du vide et
- a est une longueur caractéristique qui sera précisée plus tard.

Vu la symétrie du problème, il convient d'utiliser les coordonnées sphériques. On se place en régime stationnaire. Soit $f(r, \theta, \phi)$ une fonction scalaire quelconque, on rappelle la formule du gradient en coordonnées sphériques :

$$\vec{\text{grad}} f(r, \theta, \phi) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{u}_\phi \quad (2)$$

La compréhension fine du modèle quantique de l'atome n'est pas requise dans cet exercice. Il s'agit juste d'une occasion pour réviser l'électrostatique sur un système physique intéressant.

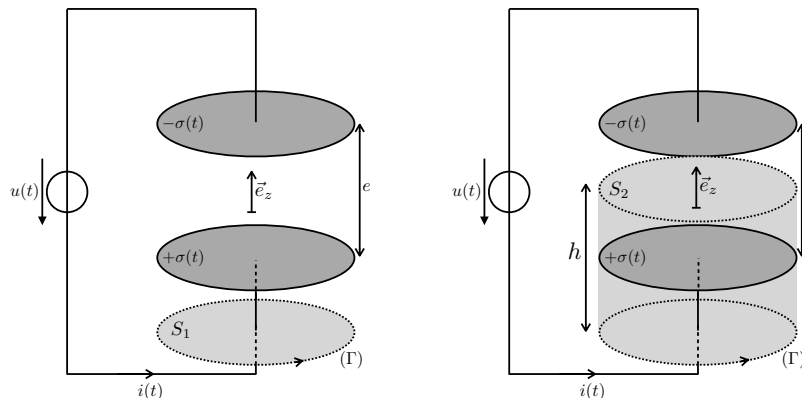
1. Commenter les invariances et symétries du système. Déterminer \vec{E} .
2. Etudier les cas limites $r \ll a$ et $r \gg a$ pour V et \vec{E} . Commenter.
3. Calculer le flux du champ électrostatique à travers une sphère de centre O et de rayon r . En déduire la charge $q(r)$ qui se trouve à l'intérieur de cette sphère.
4. En déduire en O la présence d'une charge ponctuelle à déterminer. Quelle est la charge contenue dans tout l'espace ? Expliquer en quoi le potentiel V est cohérent avec la distribution de charge d'un atome d'hydrogène.
5. Etablir l'expression de la densité volumique de charge $\rho(r)$ à la distance r du point origine O .
6. On définit la densité de probabilité de présence $P(r)$ de trouver l'électron dans la couche sphérique comprise entre r et $r + dr$. On admet que $dq(r) = -eP(r)dr$ où $dq(r)$ est la charge contenue cette couche sphérique. Etudier le sens de variation de la fonction $P(r)$. Comment peut-on interpréter a ? Donner l'ordre de grandeur de a .

EXERCICE 3 : Insuffisance du théorème d'Ampère magnétostatique en régime variable

On étudie un condensateur plan constitué d'armatures circulaires de rayon R et distantes de e . Il est alimenté par une tension sinusoïdale $u(t)$: les densités de charges surfaciques $+\sigma(t)$ et $-\sigma(t)$ dépendent donc du temps. on se place dans un régime suffisamment basse fréquence pour considérer la dépendance en temps comme une perturbation d'un régime statique. Dans ce cas, le champ $\vec{E}(M, t)$ est le même que celui en électrostatique.

1. Donner le champ électrique entre les armatures et à l'extérieur du condensateur supposé infini.

On définit un contour fermé (Γ) ainsi que deux surfaces S_1 et S_2 s'appuyant sur (Γ) : S_1 est le disque s'appuyant directement sur (Γ) et S_2 est l'union de la surface latérale S_l du cylindre de hauteur h et du disque \mathcal{D} parallèle aux armatures et situé entre les armatures.

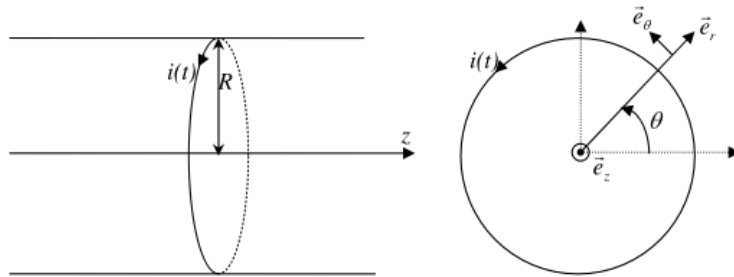


2. En appliquant le théorème d'Ampère, déterminer la circulation du champ $\vec{B}(M, t)$ sur le contour fermé Γ . On choisira deux surfaces $S_1(\Gamma)$ et $S_2(\Gamma)$ s'appuyant sur le même contour fermé Γ comme représenté sur la figure ci-dessous. Montrer que l'on arrive à une contradiction.
3. Déterminer le flux Φ_e du champ \vec{E} à travers $S_1(\Gamma)$ et $S_2(\Gamma)$.
4. Relier $\Phi_e(S_2)$ et le courant $i(t)$.
5. Montrer que l'utilisation du théorème d'Ampère généralisé résout le problème rencontré à la question 2.

S'ENTRAÎNER

EXERCICE 4 : Champs électrique et magnétique à l'intérieur d'un solénoïde

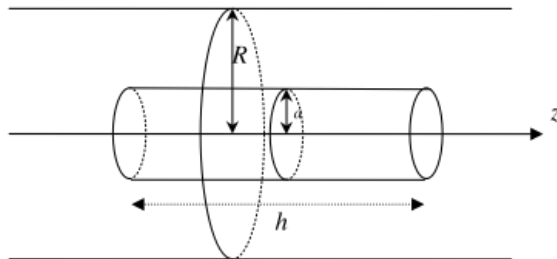
On considère un solénoïde circulaire de rayon R comportant n spires par unité de longueur. Sa longueur est très grande devant sa largeur et on peut considérer que le solénoïde se comporte comme un solénoïde infini. Les spires du solénoïde sont parcourues par une intensité sinusoïdale de pulsation ω : $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$. On considère ici que le champ magnétique créé par le solénoïde est de la même forme qu'en magnétostatique : $\vec{B} = \mu_0 n i(t) \vec{e}_z$ à l'intérieur du solénoïde et $\vec{B} = \vec{0}$ à l'extérieur.



On se place dans la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. Un point quelconque de l'espace est alors repéré par ses coordonnées (r, θ, z) .

1. Montrer qu'il existe un champ électrique créé par le solénoïde.
2. En admettant que le champ électrique est orthoradial et ne dépend que de r et du temps, déterminer l'expression du champ électrique \vec{E} créé par le solénoïde en tout point M de l'espace en fonction de μ_0 , n , I_0 , ω , r et t .

Un cylindre métallique plein de conductivité γ , de rayon a et de longueur h très grande par rapport à a est placé à l'intérieur du solénoïde précédent. L'axe du solénoïde et l'axe du cylindre sont confondus.



On fait l'hypothèse que l'introduction du conducteur cylindrique ne modifie pas sensiblement les champs électrique et magnétique créés à l'intérieur du solénoïde en l'absence du cylindre conducteur.

3. En appliquant la loi d'Ohm locale, déterminer la densité de courant volumique \vec{j} qui apparaît dans le cylindre conducteur.

4. Déterminer la puissance instantanée \mathcal{P}_J dissipée par effet Joule dans le cylindre. On exprimera \mathcal{P}_J en fonction de $\gamma, h, a, \mu_0, n, \omega, I_0$ et t . En déduire la moyenne temporelle $\langle \mathcal{P}_J \rangle$ de la puissance instantanée \mathcal{P}_J en fonction de $\gamma, h, a, \mu_0, n, \omega$ et I_0 .
5. Citer une application du phénomène physique ainsi mis en évidence dans la question précédente.

Soit \vec{B}' le champ magnétique variable créé par la densité volumique de courant de la question 3. à l'intérieur du cylindre conducteur. On admettra que le champ \vec{B}' se met sous la forme : $\vec{B}' = B'(r, t)\vec{e}_z$ où $B'(r, t)$ est une fonction qui ne dépend que de r et du temps t et que le champ est nul à l'extérieur du cylindre conducteur.

6. En utilisant le théorème d'Ampère généralisé, déterminer l'expression de \vec{B}' à l'intérieur du cylindre conducteur. On précisera clairement le contour choisi pour l'application de ce théorème. Pour un métal de conductivité $\gamma \approx 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$, simplifier l'expression de \vec{B}' en précisant le domaine de fréquences choisi.
7. On souhaite déterminer les conditions dans lesquelles l'hypothèse faite précédemment est valable (l'introduction du conducteur ne modifie pas le champ magnétique existant dans le solénoïde en l'absence du cylindre conducteur). \vec{B} désignant le champ magnétique créé dans le solénoïde en l'absence du cylindre conducteur et \vec{B}' est la forme simplifiée du champ déterminé à la question 6., déterminer le rapport $\frac{B}{B'}$ des amplitudes des champs magnétiques \vec{B} et \vec{B}' en un point se trouvant à l'intérieur du cylindre conducteur. On exprimera ce rapport en fonction de r, a, γ, μ_0 et ω .
8. Les dimensions du solénoïde et du cylindre conducteur étant fixées, quelles sont les conditions sur γ et ω à vérifier pour que l'hypothèse précédente soit valable ?

Donnée : Opérateur rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{rot}}\vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

EXERCICE 5 : Emission radioactive

Une masse radioactive, ponctuelle, initialement neutre, située au point O émet, à partir de l'instant $t = 0$, des particules α (noyaux d'He) avec une vitesse v_0 supposée constante et de façon isotrope. A l'instant $t > 0$, la charge électrique en O s'écrit :

$$q(t) = q_0 \left(\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - 1 \right). \quad (3)$$

où τ est un temps caractéristique de désintégration de l'élément radioactif.

1. Commenter la forme de $q(t)$ en étudiant les cas limites $t = 0$ et $t \rightarrow \infty$.
2. Exprimer la charge $Q(r, t)$ contenue dans la sphère de rayon r à l'instant t . On distinguera les cas où $r < v_0 t$ et $r > v_0 t$.
3. Exprimer $\vec{E}(\vec{r}, t)$.
4. Exprimer la densité volumique de charge $\rho(\vec{r}, t)$ et la densité volumique de courant $\vec{j}(\vec{r}, t)$ pour $t > 0$.
5. Montrer qu'un champ magnétique nul associé à ce champ électrique satisfait aux équations de Maxwell. En coordonnées sphériques, le rotationnel d'un vecteur $\vec{A}(r, \theta, \varphi)$ quelconque s'écrit :

$$\vec{\text{rot}}\vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi$$

6. En déduire le vecteur de Poynting et la puissance transmise par le champ électromagnétique à travers une sphère de rayon r .

7. Calculer la densité d'énergie électromagnétique $u_{em}(r, t)$.
8. Calculer la puissance cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charges.
9. Mettre en relation les deux grandeurs énergétiques précédentes. Commenter.

POUR ALLER PLUS LOIN

EXERCICE 6 : Sphère supraconductrice

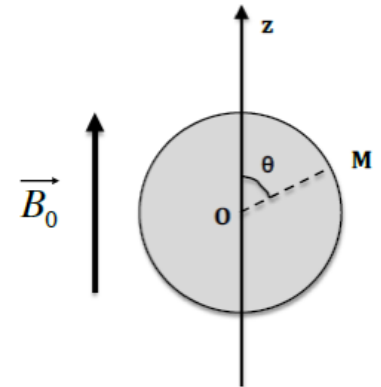
Une sphère supraconductrice de centre O et de rayon a est plongée dans le vide où règne un champ magnétique statique et uniforme $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ en l'absence de la sphère. On admet, comme une propriété fondamentale des matériaux supraconducteurs, que le champ magnétique est nul à l'intérieur de tout volume supraconducteur. On se place dans la base sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ et en régime stationnaire.

1. Déterminer le système d'équations différentielles et les conditions aux limites pour le champ magnétique à l'extérieur de la sphère.
2. Montrer que ce champ magnétique vérifie : $\vec{B} = \overrightarrow{\text{grad}}\psi$ et établir l'équation différentielle vérifiée par $\psi(r, \theta)$ à l'extérieur de la sphère avec θ l'angle entre \vec{B}_0 et \vec{e}_r .
3. On cherche une solution de la forme $\psi(r, \theta) = R(r) \cos \theta$. Déterminer $R(r)$ sous la forme

$$R(r) = \sum_n \alpha_n r^n$$

avec α_n des constantes.

4. Déterminer les courants portés par la sphère.



Données :

- Opérateur gradient en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

- Opérateur laplacien en coordonnées sphériques :

$$\Delta f(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$