北航中法工程师学院
Centrale Pékin

Équations différentielles

École Centrale de Pékin

Cours de mathématiques du cycle préparatoire

9 septembre 2020

Chapitre 1 Notion d'équations différentielles

Table des matières du chapitre

Ce premier chapitre est une introduction aux équations différentielles. Il introduit le vocabulaire et les notions fondamentales qui seront utilisés dans les prochains chapitres. Il a pour but de préciser un certain nombre de questions que l'on se pose lorsque l'on étudie une équation différentielle et donne quelques éléments de réponse. Nous allons définir ce qu'est une équation différentielle, une solution d'une telle équation, puis un problème de Cauchy. Nous dresserons un catalogue des équations différentielles que nous étudierons plus précisément dans la suite. Nous verrons enfin sous quelles conditions une solution existe et est unique, et nous en donnerons une interprétation géométrique. Nous n'aborderons pas dans ce chapitre relativement abstrait les méthodes pour trouver la forme explicite des solutions de certaines équations différentielles, elles feront l'objet des chapitres suivants. Notons d'ailleurs qu'en général on ne sait pas se résoudre explicitement les équations différentielles. Cela n'empêche pas de pouvoir donner des conditions d'existence et d'unicité, et de savoir étudier les solutions de ces équations différentielles.

Dans tout ce chapitre, n désigne un entier naturel non nul, $\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou celui des nombres complexes $\mathbb{C}$, et enfin E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. En pratique, on a généralement $E = \mathbb{K}^N$, où $N \in \mathbb{N}^*$.

1.1 Définitions

Une équation différentielle est une équation portant sur les dérivées d'une fonction. Plus précisément,

Définition 1
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert E^{n+1} et G une application de $I \times \Omega$ dans E. On dit que la relation

$$G(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{$\mathcal{E}$}$$

est une ***équation différentielle d'ordre*** n.

Exemple 2 — *La relation $t^2 y'' + y' - 3ty + \cos(t) = 2t - 5$ est une équation différentielle d'ordre 2, où G est l'application $G : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$; $(t, y_0, y_1, y_2) \longmapsto t^2 y_2 + y_1 - 3ty_0 + \cos(t) - 2t + 5$*

Définition 3
On appelle ***solution*** *de $\mathcal{E}$ toute application φ d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ à valeurs dans E, n fois dérivable et telle que*

1. *pour tout $t \in J$, $\big(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)\big) \in I \times \Omega$,*
2. *pour tout $t \in J$, $G\big(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)\big) = 0$.*

Lorsque l'on donne une solution d'une équation différentielle, il ne faut pas oublier de préciser son intervalle de définition.

Remarque 4 — *Lorsque l'on demande de résoudre une équation différentielle sur un intervalle J, cela signifie que l'on cherche les solutions définies sur J.*

Exemples 5

- *Une solution de l'équation différentielle $t^2y'' + y' - 3ty + \cos(t) = 2t - 5$ est une application φ d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable, telle que, pour tout $t \in J$,*
$$t^2\varphi''(t) + \varphi'(t) - 3t\varphi(t) + \cos(t) = 2t - 5.$$
- *Une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 0$ est, par exemple, la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto 1$.*
- *Des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ sont, par exemple, les fonctions sinus ou cosinus définies sur $\mathbb{R}$.*

Les théorèmes que nous énoncerons porteront sur les équations différentielles dites résolues.

Définition 6
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et U un ouvert de E^n. Une équation différentielle est dite ***résolue*** *si elle s'écrit sous la forme*
$$y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{$\mathcal{E}_R$}$$
où f est une application de $I \times U$ à valeurs dans E.

Une solution d'une telle équation est donc une application φ d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ à valeurs dans E, n fois dérivable et telle que

1. *pour tout $t \in J$, $\big(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)\big) \in I \times U$,*
2. *pour tout $t \in J$, $\varphi^{(n)}(t) = f\left(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)\right)$.*

Exemple 7 — *L'équation $y' = y^2 + 1$ est une équation différentielle résolue.*

Remarque 8 — *Si f est continue alors toute solution φ de $\mathcal{E}_R$ est de classe $\mathcal{C}^n$ puisque φ est n fois dérivable et $\varphi^{(n)}$ est continue par continuité de f.*

Remarque 9 — *Les équations différentielles non résolues de la forme $h(t)y^{(n)} = g(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ où h est une application de I dans $\mathbb{K}$ se ramènent à la forme résolue $\mathcal{E}_R$ sur les intervalles sur lesquels h ne s'annule pas, en divisant par $h(t)$. Pour résoudre l'équation $h(t)y^{(n)} = g(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ sur un intervalle I, l'idée sera donc de résoudre l'équation différentielle résolue sur les intervalles de non annulation de h, puis de "recoller" éventuellement les solutions pour trouver les solutions définies sur I. On parlera de problèmes de raccordement de solutions.*

1.2 Quelques équations différentielles particulières

Nous dressons dans cette partie un catalogue des différentes équations différentielles que nous rencontrerons dans les chapitres suivants.

1.2.1 Équations différentielles scalaires

On se place dans le cas particulier où $E = \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{K}^n$ et f est une application continue de $I \times U$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Définition 10
L'équation différentielle $y^{(n)} = f(t, y, \ldots, y^{(n-1)})$ est appelée ***équation différentielle scalaire*** *d'ordre n.*

Une solution d'une équation différentielle scalaire d'ordre n est donc en particulier une application n fois dérivable d'un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Donnons quelques exemples d'équations différentielles scalaires que l'on étudiera.

1. **Les équations différentielles linéaires scalaires.**
   • Les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n sont de la forme
   $$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + b(t),$$
   où les $a_i : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $b : I \longrightarrow \mathbb{K}$ sont des applications continues. Les a_i sont appelés les **coefficients** de l'équation.
   • L'équation différentielle **homogène** ou **sans second membre** associée à l'équation différentielle précédente est l'équation
   $$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}.$$
   Il s'agit du cas où b est l'application nulle.
   • Si les a_i sont des applications constantes, on dit que l'équation est **à coefficients constants**. Elle s'écrit donc sous la forme
   $$y^{(n)} = a_0y + a_1y' + + \ldots + a_{n-1}y^{(n-1)} + b(t),$$
   où pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $a_i \in \mathbb{K}$ et $b : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est une application continue.

   EXEMPLES 11
   - $y' = 5ty + \mathrm{e}^t$ *est une équation différentielle linéaire du premier ordre (ou d'ordre* 1*).*
   - $y' - 4y = \cos(2t)$ *est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.*
   - $y' = x^2y$ *est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre.*
   - $y'' = x^2y' + \dfrac{1}{x}y + (x+1)\mathrm{e}^{2x}$ *est une équation différentielle linéaire du second ordre (ou d'ordre* 2*).*
   - $y'' = y$ *est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants.*
   - $(y')^2 = 2y$ *et* $y' \times y = 1$ *ne sont pas des équations différentielles linéaires.*

2. **Les équations différentielles scalaires à variables séparables**
   Ce sont de les équations différentielles de la forme
   $$y' = g(t)h(y),$$
   où $g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $h : J \longrightarrow \mathbb{K}$ sont des applications continues.

   EXEMPLE 12 — *L'équation* $y' = \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-y}$ *est une équation différentielle scalaire à variables séparables.*

1.2.2 Équations différentielles vectorielles du premier ordre

On se place dans le cas particulier où $n = 1$.

On considère I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, U un ouvert de E et f une application continue de $I \times U$ à valeurs dans E.

DÉFINITION 13
L'équation différentielle $y' = f(t, y)$ *est appelée* ***équation différentielle vectorielle du premier ordre*** *(ou d'ordre* 1*).*

Une solution d'une équation différentielle vectorielle du premier ordre est donc en particulier une application dérivable d'un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Donnons quelques exemples d'équations différentielles vectorielles que l'on étudiera.

1. **Les équations différentielles linéaires vectorielles du premier ordre**
   • Les équations différentielles linéaires vectorielles du premier ordre sont de la forme
$$y' = a(t) \cdot y + b(t),$$
   où $a : I \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ et $b : I \longrightarrow E$ sont des applications continues.
   • L'équation différentielle **homogène** ou **sans second membre** associée à l'équation différentielle précédente est l'équation
$$y' = a(t) \cdot y.$$
   Il s'agit du cas où b est l'application nulle.
   • Si l'application a est constante, on dit que l'équation est **à coefficient constant**. Elle s'écrit donc sous la forme
$$y' = a \cdot y + b(t),$$
   où $a \in \mathcal{L}(E)$ et $b : I \longrightarrow E$ est une application continue.
   • Soient N la dimension de E et $\mathcal{B}$ une base de E. En notant $A(t) = (a_{i,j}(t))_{\substack{i=1\dots N \\ j=1\dots N}}$ la matrice de $a(t)$ dans la base $\mathcal{B}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_N(t) \end{pmatrix}$ le vecteur colonne des composantes de $b(t)$ dans la base $\mathcal{B}$, l'équation différentielle $y' = a(t) \cdot y + b(t)$ s'écrit sous forme matricielle
$$Y' = A(t)Y + B(t).$$
   Alors $\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{pmatrix}$ est solution de $Y' = A(t)Y + B(t)$ si et seulement si $(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ est solution du système différentiel linéaire scalaire du premier ordre suivant
$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1' & = & a_{11}(t)y_1 + \dots + a_{1N}(t)y_N + b_1(t) \\ \vdots & & \\ y_N' & = & a_{N1}(t)y_1 + \dots + a_{NN}(t)y_n + b_N(t). \end{array} \right.$$
   Remarque 14 — *En pratique, on a généralement $E = \mathbb{K}^N$ et en considérant la base canonique, on confondra alors l'endomorphisme $a(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^N)$ avec sa représentation matricielle $A(t) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ et le vecteur $b(t) \in \mathbb{K}^N$ avec le vecteur colonne $B(t) \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{K})$.*

   Exemples 15
   • $Y' = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} \ln(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *est une équation différentielle linéaire vectorielle du premier ordre.*
   • $Y' = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ *est une équation différentielle linéaire vectorielle du premier ordre à coefficients constants.*
   • $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} Y$ *est une équation différentielle linéaire vectorielle homogène du premier ordre à coefficients constants.*
   • $\left\{ \begin{array}{l} x' = 5x - y \\ y' = x + 3y \end{array} \right.$ *est un système d'équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre.*

2. **Les équations différentielles autonomes**
   Ce sont les équations différentielles de la forme
$$y' = f(y),$$
   où f est une application de I dans E.

   Exemple 16 — *Les équations $y' = \sqrt{y}$ et $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont des équations différentielles autonomes.*

1.2.3 De l'ordre n à l'ordre 1

Les équations différentielles scalaires d'ordre n se ramènent aux équations différentielles vectorielles du premier ordre. Ceci nous permettra en particulier de ramener l'étude de certaines équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n à celle des équations différentielles linéaires vectorielles d'ordre 1.

Plus précisément, considérons I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, J un intervalle inclus dans I, U un ouvert de $\mathbb{K}^n$ et $f : I \times U \longrightarrow \mathbb{K}$ une application continue.

Alors l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathcal{D}^n(I,\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{D}^1\left(I,\mathbb{K}^n\right) \\ & \varphi & \longmapsto & \begin{pmatrix} \varphi \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix} \end{array}$$

induit une bijection de l'ensemble $\mathcal{S}_n(J)$ des solutions définies sur J de $y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ sur l'ensemble $\mathcal{S}_1(J)$ des solutions définies sur J de $Y' = F(t, Y)$, où

$$F : I \times U \longrightarrow \mathbb{K}^n \; ; \; \left(t, \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}\right) \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ f(t, y_0, \ldots, y_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Preuve — • Soit $\varphi \in \mathcal{S}_n(J)$. L'application $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{K}$ est donc une solution de $y^{(n)} = f\left(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ sur J. Alors φ est n fois dérivable donc $\Phi(\varphi)$ est dérivable et, pour tout $t \in J$,

$$\left(\Phi(\varphi)\right)'(t) = \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \\ \vdots \\ f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = F\left(t, \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}\right) = F\left(t, \Phi(\varphi)(t)\right).$$

Donc $\Phi(\varphi) : J \longrightarrow \mathbb{K}^N$ est solution de $Y' = F(t, Y)$. D'où, $\Phi(\varphi) \in \mathcal{S}_1(J)$.

Ainsi, $\Phi\left(\mathcal{S}_n(J)\right) \subset \mathcal{S}_1(J)$.

On peut donc considérer l'application induite $\tilde{\Phi} : \mathcal{S}_n(J) \longrightarrow \mathcal{S}_1(J)$.

• L'application $\tilde{\Phi}$ est injective puisque si φ_1 et φ_2 sont des éléments de $\mathcal{S}_n(J)$ tels que $\tilde{\Phi}(\varphi_1) = \tilde{\Phi}(\varphi_2)$ alors par égalité des composantes, on a $\varphi_1 = \varphi_2$.

• Montrons que $\tilde{\Phi}$ est surjective. Soit $\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_1(J)$, une solution de $Y' = F(t, Y)$ sur l'intervalle J. Alors pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, φ_i est dérivable et pour tout $t \in J$, on a

$$\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \vdots \\ \varphi_{n-2} \\ \varphi_{n-1} \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} \varphi_0'(t) \\ \vdots \\ \varphi_{n-2}'(t) \\ \varphi_{n-1}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(t) \\ f\left(t, \varphi_0(t), \ldots, \varphi_{n-1}(t)\right) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tout $i \in [\![0, n-2]\!]$, $\varphi_i' = \varphi_{i+1}$ et pour tout $t \in J$, $\varphi_{n-1}'(t) = f(t, \varphi_0(t), \ldots, \varphi_{n-1}(t))$.

On en déduit que φ_0 est dérivable, de dérivée φ_1 elle-même dérivable, et ainsi de suite, φ_0 est n fois dérivable. et pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $\varphi_i = \varphi_0^{(i)}$.

Donc pour tout $t \in J$,

$$\varphi_0^{(n)}(t) = (\varphi_0^{(n-1)})'(t) = (\varphi_{n-1})'(t) = f\left(t, \varphi_0(t), \ldots, \varphi_{n-1}(t)\right) = f(t, \varphi_0(t), \varphi_0'(t), \ldots, \varphi_0^{(n-1)}(t)).$$

Donc $\varphi_0 : J \longrightarrow \mathbb{K}$ est une solution définie sur J de $y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, et donc $\varphi_0 \in \mathcal{S}_n(J)$.

Comme $\tilde{\Phi}(\varphi_0) = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \end{pmatrix}$, on en déduit que $\tilde{\Phi}$ est surjective.

• L'application $\tilde{\Phi}$ est donc bijective. D'où le résultat. □

On pourra donc retenir que l'équation $y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ $(\mathcal{E}_n)$ est équivalente à l'équation $Y' = F(t, Y)$ $(\mathcal{E}_1)$, dans le sens où si φ est solution de $(\mathcal{E}_n)$ alors $\begin{pmatrix} \varphi \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix}$ est solution de $(\mathcal{E}_1)$ et si $\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \end{pmatrix}$ est solution de $(\mathcal{E}_1)$ alors φ_0 est solution de $(\mathcal{E}_n)$.

Exemple 17 — *L'étude de équation différentielle, d'ordre 2, $y'' + 4ty' + 2y = 0$ se ramène à celle de l'équation différentielle, d'ordre 1, $Y' = f(t, Y)$, où*

$$F\left(t, \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y_1 \\ -4ty_1 - 2y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Précisément, φ est solution de l'équation différentielle, d'ordre 2, $y'' + 4ty' + 2y = 0$ si et seulement si $\begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \end{pmatrix}$ est solution de l'équation différentielle, d'ordre 1, $Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4t \end{pmatrix} Y$.

1.3 Problème de Cauchy

Les questions naturelles qui se posent lorsque l'on étudie une équation différentielle sont de savoir trouver des solutions, mais aussi leur intervalle maximal d'existence, de savoir si on a obtenu toutes les solutions, et en particulier d'obtenir éventuellement l'unicité lorsque l'on rajoute des conditions initiales. Nous discutons dans cette partie des questions d'existence, d'unicité et d'intervalles de définition des solutions. Le calcul explicite, s'il est possible, de ces solutions fera l'objet de chapitres plus spécifiques.

Dans cette partie, on considère I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, U un ouvert de E^n et f une application continue de $I \times U$ dans E.

On s'intéresse à l'équation différentielle

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (\mathcal{E}_R)$$

1.3.1 Définition

Définition 18
*Soit $(t_0, y_0, \ldots, y_{n-1}) \in I \times U$. On appelle **problème de Cauchy***

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y_1, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}, \end{cases}$$

la recherche de la (ou les) solution φ de $\mathcal{E}_R$ définie sur un intervalle J contenant t_0 et telle que $\varphi(t_0) = y_0$, $\varphi'(t_0) = y_1$, ... $\varphi^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$.

On dit qu'une telle solution φ satisfait à la condition initiale $y(t_0) = y_0$, ... , $y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$.

Exemple 19 — *La fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $t \longmapsto 2e^{-t}$ est une solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' + y = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Remarque 20 — *Si l'équation $\mathcal{E}_R$ décrit la loi d'évolution d'un système physique au cours du temps, résoudre le problème de Cauchy revient à trouver l'évolution du système connaissant son état en t_0.*

1.3.2 Solutions maximales et globales

Pour définir une solution d'une équation différentielle, il faut préciser un intervalle de définition. La fonction $t \longmapsto e^t$ est une solution de $y' = y$ sur $]1,2[$ mais aussi sur $\mathbb{R}$ et donc sur tout intervalle de $\mathbb{R}$. Il est donc intéressant de fournir le plus grand intervalle possible.

Définition 21
*Soient $\varphi_1 : J_1 \longrightarrow E$ et $\varphi_2 : J_2 \longrightarrow E$ deux solutions de $y^{(n)} = f(t, y, \ldots, y^{(n-1)})$. On dit que φ_2 est un **prolongement** de φ_1 si $J_1 \subset J_2$ et si, pour tout $t \in J_1$, $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$.*

Exemple 22 — *La fonction $\varphi_1 :]1,3[\longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto e^t$ est une solution de l'équation différentielle $y' = y$ qui prolonge la fonction $\varphi_2 :]1,2[\longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto e^t$.*

Définition 23
*Une solution $\varphi : J \longrightarrow E$ de $y^{(n)} = f(t, y, \ldots, y^{(n-1)})$ est dite **maximale** si elle n'admet pas de prolongement qui soit solution.*

Remarque 24 — *La question de l'unicité dans le problème de Cauchy nécessite de considérer les solutions maximales.*

Définition 25
*On appelle **solution globale** de $\mathcal{E}_R$ toute solution définie sur l'intervalle I tout entier.*

Proposition 26
Une solution globale est une solution maximale. La réciproque est fausse en général.

Preuve — • Une solution globale étant définie sur I en entier, elle ne peut pas être prolongée et elle est donc maximale.

• Donnons l'exemple d'une solution maximale non globale. Considérons le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = y^2, \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$. On a $f(t,y) = y^2$, définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $I = \mathbb{R}$. La fonction $\varphi : \left]-\infty; \frac{1}{y_0}\right[\longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \dfrac{y_0}{1 - y_0 t}$ est une solution de ce problème de Cauchy sur $\left]-\infty; \frac{1}{y_0}\right[$ (nous verrons par la suite comment trouver une telle solution). Comme φ tend vers l'infini lorsque t tend vers $\dfrac{1}{y_0}$, elle ne peut pas admettre de prolongement continu. Cette solution est donc maximale mais n'est pas globale. □

Exemple 27 — *La fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \exp(x)$ est une solution globale, donc maximale, de l'équation différentielle $y' = y$.*

1.3.3 Existence et unicité des solutions

Dans le cas linéaire à coefficients continus, les théorèmes suivants donnent l'existence et l'unicité d'une solution globale avec une condition initiale.

Théorème 28 (Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, cas vectoriel du premier ordre)
Soit $(t_0, y_0) \in I \times E$. Soient $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(E))$ et $b \in \mathcal{C}(I, E)$. Alors il existe une unique solution $\varphi : I \longrightarrow E$ au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(t) \cdot y + b(t), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

En particulier, φ est une solution globale.

Théorème 29 (Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, cas scalaire d'ordre n)
Soit $(t_0, y_0, \ldots, y_{n-1}) \in I \times \mathbb{K}^n$. Soient a_0, …, a_{n-1} et b des applications continues de I dans $\mathbb{K}$. Alors il

existe une unique solution $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{K}$ *au problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y^{(n)} = a_0(t)y + \ldots + a_{n-1}y^{(n-1)} + b(t), \\ y(t_0) = y_0, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

En particulier, φ *est une solution globale.*

Dans le cas linéaire à coefficients continus, tout problème de Cauchy admet donc une unique solution définie sur I tout entier.

Lorsque l'équation différentielle n'est plus linéaire, on peut encore, sous certaines hypothèses sur la fonction f, assurer l'existence et l'unicité au problème de Cauchy, mais les solutions ne seront pas nécessairement globales.

Théorème 30 (Théorème de Cauchy-Lipschitz)
Soit $(t_0, y_0) \in I \times U$*. Supposons* f *de classe* $\mathcal{C}^1$*. Alors il existe une unique solution maximale* $\varphi_m : J_m \longrightarrow E$ *au problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

De plus, l'intervalle de définition J_m *de* φ_m *est ouvert et cette solution maximale* φ_m *est un prolongement de toute autre solution à ce même problème de Cauchy.*

Théorème 31 (Théorème de Cauchy-Lipschitz, cas scalaire d'ordre n)
Soit $(t_0, y_0, \ldots, y_{n-1}) \in I \times U$*. Supposons* f *de classe* $\mathcal{C}^1$*. Alors il existe une unique solution maximale* $\varphi_m : J_m \longrightarrow \mathbb{K}$ *au problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(t, y, \ldots, y^{(n-1)}) \\ y(t_0) = y_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

De plus, l'intervalle de définition J_m *de* φ_m *est ouvert et cette solution maximale* φ_m *est un prolongement de toute autre solution à ce même problème de Cauchy.*

Exemple 32 — *L'application* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ (t, y) \longmapsto y^2$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$*. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = y^2, \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

admet une et une seule une solution maximale définie sur un intervalle ouvert.

Remarques 33

- *Sous la seule hypothèse de continuité de* f*, on n'a pas en général, d'unicité de la solution d'un problème de Cauchy. Par exemple, il n'y a pas unicité au problème de Cauchy* $\begin{cases} y' = 3(y^2)^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = 0. \end{cases}$. *L'application nulle et l'application* $\varphi_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto t^3$ *sont, par exemple, deux solutions de ce problème de Cauchy sur* $\mathbb{R}$.
- *Ce théorème est encore vrai avec des hypothèses sur la fonction* f *un peu plus faibles que* $\mathcal{C}^1$*, mais l'on rencontre généralement ce cas en pratique. Sous ces hypothèses plus faibles, le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire peut se voir alors comme une conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz.*
- *Ce théorème ne précise pas l'intervalle de définition de la solution maximale.*

Ces théorèmes donnent donc l'existence et l'unicité de solutions sous certaines hypothèses mais ne donnent pas de méthode de résolution. Nous verrons dans les prochains chapitres les techniques de calcul pour trouver la forme explicite des solutions, plus nombreuses dans le cas linéaire que non linéaire.

1.4 Interprétation géométrique

Plaçons-nous dans le cas scalaire du premier ordre : $y' = f(t, y)$ où f est une application à valeurs réelles.

Si φ est une solution de cette équation différentielle et si (t, y) est un point du graphe de φ alors $y = \varphi(t)$ et en ce point, la pente de la tangente est $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) = f(t, y)$. À chaque point (t, y) du plan, on associe alors un vecteur dont la direction est donnée par la pente $f(t, y)$, par exemple le vecteur $(1, f(t, y))$. L'ensemble de ces vecteurs d'origine (t, y) est appelé le **champ de vecteurs** associé à l'équation différentielle $y' = f(t, y)$.

Le graphe d'une solution est en tout point tangent au champ de vecteurs.

Définition 34
*On appelle **courbe intégrale** d'une équation différentielle la courbe représentative d'une solution maximale de cette équation différentielle.*

Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, par un point $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ du plan, il passe une courbe intégrale et une seule. Ainsi, deux courbes intégrales ne peuvent pas se couper.

Le tracé du champ de vecteurs permet de deviner le comportement des solutions.

Donnons quelques exemples.

Exemples 35

- *Sur la figure 1, on a tracé le champ de vecteurs associé à l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{2}y$. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficient constant donc continu. Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire nous dit donc que tout problème de Cauchy admet une unique solution globale, définie sur $\mathbb{R}$. Ainsi, à tout point du plan, il passe une unique courbe intégrale.*

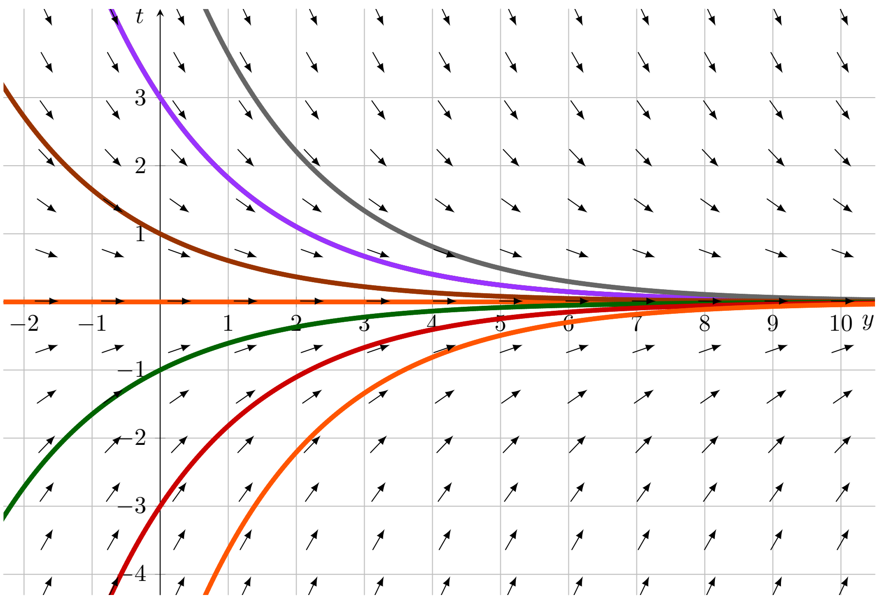

Figure 1 - *Champ de vecteurs associé à $y' = -\frac{1}{2}y$*

Plusieurs courbes intégrales sont ici tracées. Elles correspondent aux graphes des solutions de $y' = -\frac{1}{2}y$. La courbe mauve passe par le point $(0,3)$, elle représente donc LA solution qui vérifie de plus la condition initiale $y(0) = 3$. On voit également que les solutions tendent vers 0 en $+\infty$. Enfin, seule la droite $y = 0$ passe par le point $(0,0)$: l'application nulle est l'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = -\frac{1}{2}y, \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

- *Sur la figure 2, on a tracé le champ de vecteurs associé à l'équation différentielle* $y' = 3(y^2)^{\frac{1}{3}}$. *Nous avons vu à la remarque 33 que le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas (on n'est pas dans le cas* $\mathcal{C}^1$ *) et qu'il n'y a pas unicité du problème de Cauchy.*

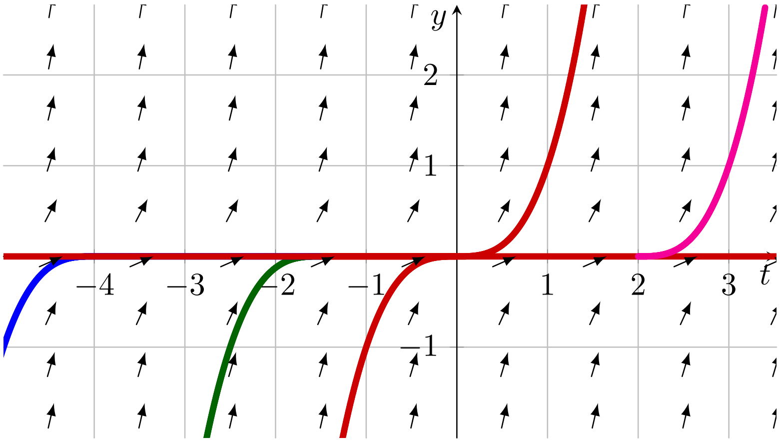

FIGURE 2 - *Champ de vecteurs associé à* $y' = 3(y^2)^{\frac{1}{3}}$

Des courbes intégrales passant par le point $(0, 0)$ *sont ici tracées. Il existe donc plusieurs, et même une infinité, de courbes intégrales passant par le point* $(0, 0)$. *Cela traduit le fait que le problème de Cauchy* $\left\{\begin{array}{l} y' = 3(y^2)^{\frac{1}{3}}, \\ y(0) = 0 \end{array}\right.$. *admet une infinité de solutions. Il n'y a pas unicité.*

- *Sur la figure 3, on a tracé le champ de vecteurs associé à l'équation différentielle* $y' = y^2$. *La fonction* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ (t, y) \longmapsto y^2$ *étant de classe* $\mathcal{C}^1$, *le théorème de Cauchy-Lipschitz nous dit que tout problème de Cauchy admet une unique solution maximale. Ainsi, à tout point du plan, il passe une et seule courbe intégrale. Cependant, nous avons vu à la proposition 26 qu'une solution maximale n'est pas forcément globale. Nous en avions donné un exemple.*

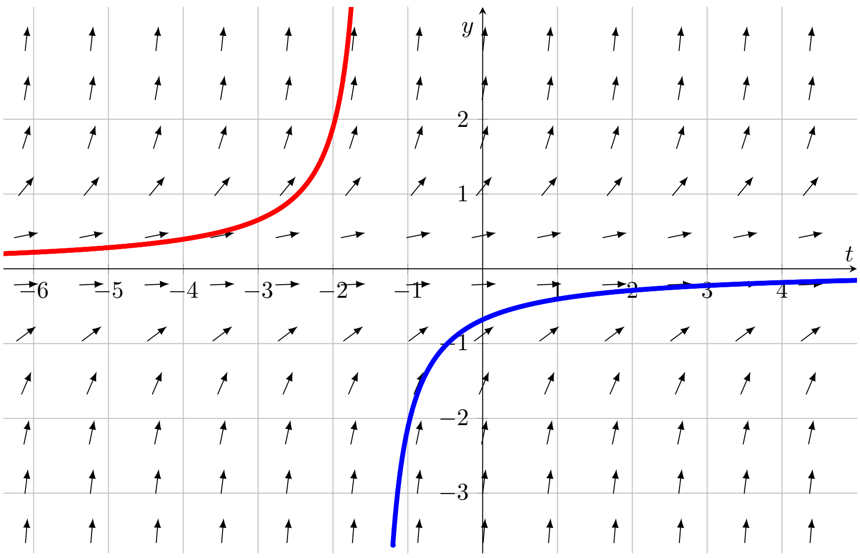

FIGURE 3 - *Champ de vecteurs associé à* $y' = y^2$

Deux courbes intégrales sont ici tracées. Elles admettent une asymptote verticale. Elles représentent donc des solutions maximales mais non globales car elles ne sont pas définies sur $\mathbb{R}$.