北航中法工程师学院
Centrale Pékin

Équations différentielles

École Centrale de Pékin

Cours de mathématiques du cycle préparatoire

6 septembre 2020

Chapitre 1 Notion d'équations différentielles

Table des matières du chapitre

Ce premier chapitre est une introduction aux équations différentielles. Il introduit le vocabulaire et les notions fondamentales qui seront utilisés dans les prochains chapitres. Il a pour but de préciser un certain nombre de questions que l'on se pose lorsque l'on étudie une équation différentielle et donne quelques éléments de réponse. Nous allons définir ce qu'est une équation différentielle, une solution d'une telle équation, puis un problème de Cauchy. Nous dresserons un catalogue des équations différentielles que nous étudierons plus précisément dans la suite. Nous verrons enfin sous quelles conditions une solution existe et est unique, et nous en donnerons une interprétation géométrique. Nous n'aborderons pas dans ce chapitre relativement abstrait les méthodes pour trouver la forme explicite des solutions de certaines équations différentielles, elles feront l'objet des chapitres suivants. Notons d'ailleurs qu'en général on ne sait pas se résoudre explicitement les équations différentielles. Cela n'empêche pas de pouvoir donner des conditions d'existence et d'unicité, et de savoir étudier les solutions de ces équations différentielles.

Dans tout ce chapitre, n désigne un entier naturel non nul, $\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou celui des nombres complexes $\mathbb{C}$, et enfin E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. En pratique, on a généralement $E = \mathbb{K}^N$, où $N \in \mathbb{N}^*$.

1.1 Définitions

Une équation différentielle est une équation portant sur les dérivées d'une fonction. Plus précisément,

DÉFINITION 1
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert E^{n+1} et G une application de $I \times \Omega$ dans E. On dit que la relation

$$G(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{$\mathcal{E}$}$$

*est une **équation différentielle d'ordre** n.*

EXEMPLE 2 — *La relation $t^2y'' + y' - 3ty + \cos(t) = 2t - 5$ est une équation différentielle d'ordre 2, où G est l'application $G : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$; $(t, y_0, y_1, y_2) \longmapsto t^2y_2 + y_1 - 3ty_0 + \cos(t) - 2t + 5$*

DÉFINITION 3
*On appelle **solution** de $\mathcal{E}$ toute application φ d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ à valeurs dans E, n fois dérivable et telle que*

1. *pour tout $t \in J$, $\big(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)\big) \in I \times \Omega$,*
2. *pour tout $t \in J$, $G\big(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)\big) = 0$.*

Lorsque l'on donne une solution d'une équation différentielle, il ne faut pas oublier de préciser son intervalle de définition.

Remarque 4 — *Lorsque l'on demande de résoudre une équation différentielle sur un intervalle J, cela signifie que l'on cherche les solutions définies sur J.*

Exemples 5

- *Une solution de l'équation différentielle $t^2y'' + y' - 3ty + \cos(t) = 2t - 5$ est une application φ d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable, telle que, pour tout $t \in J$,*
$$t^2\varphi''(t) + \varphi'(t) - 3t\varphi(t) + \cos(t) = 2t - 5.$$
- *Une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 0$ est, par exemple, la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto 1$.*
- *Des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ sont, par exemple, les fonctions sinus ou cosinus définies sur $\mathbb{R}$.*

Les théorèmes que nous énoncerons porteront sur les équations différentielles dites résolues.

Définition 6
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et U un ouvert de E^n. Une équation différentielle est dite ***résolue*** *si elle s'écrit sous la forme*
$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \tag{$\mathcal{E}_R$}$$
où f est une application de $I \times U$ à valeurs dans E.

Une solution d'une telle équation est donc une application φ d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ à valeurs dans E, n fois dérivable et telle que

1. *pour tout $t \in J$, $\left(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)\right) \in I \times U$,*
2. *pour tout $t \in J$, $\varphi^{(n)}(t) = f\left(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)\right)$.*

Exemple 7 — *L'équation $y' = y^2 + 1$ est une équation différentielle résolue.*

Remarque 8 — *Si f est continue alors toute solution φ de $\mathcal{E}_R$ est de classe $\mathcal{C}^n$ puisque φ est n fois dérivable et $\varphi^{(n)}$ est continue par continuité de f.*

Remarque 9 — *Les équations différentielles non résolues de la forme $h(t)y^{(n)} = g(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ où h est une application de I dans $\mathbb{K}$ se ramènent à la forme résolue $\mathcal{E}_R$ sur les intervalles sur lesquels h ne s'annule pas, en divisant par $h(t)$. Pour résoudre l'équation $h(t)y^{(n)} = g(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ sur un intervalle I, l'idée sera donc de résoudre l'équation différentielle résolue sur les intervalles de non annulation de h, puis de "recoller" éventuellement les solutions pour trouver les solutions définies sur I. On parlera de problèmes de raccordement de solutions.*

1.2 Quelques équations différentielles particulières

Nous dressons dans cette partie un catalogue des différentes équations différentielles que nous rencontrerons dans les chapitres suivants.

1.2.1 Équations différentielles scalaires

On se place dans le cas particulier où $E = \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{K}^n$ et f est une application continue de $I \times U$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Définition 10
L'équation différentielle $y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)})$ est appelée ***équation différentielle scalaire*** *d'ordre n.*

Une solution d'une équation différentielle scalaire d'ordre n est donc en particulier une application n fois dérivable d'un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Donnons quelques exemples d'équations différentielles scalaires que l'on étudiera.

1. **Les équations différentielles linéaires scalaires.**
   • Les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n sont de la forme
   $$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + b(t),$$
   où les $a_i : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $b : I \longrightarrow \mathbb{K}$ sont des applications continues. Les a_i sont appelés les **coefficients** de l'équation.
   • L'équation différentielle **homogène** ou **sans second membre** associée à l'équation différentielle précédente est l'équation
   $$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}.$$
   Il s'agit du cas où b est l'application nulle.
   • Si les a_i sont des applications constantes, on dit que l'équation est **à coefficients constants**. Elle s'écrit donc sous la forme
   $$y^{(n)} = a_0y + a_1y' + + \ldots + a_{n-1}y^{(n-1)} + b(t),$$
   où pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $a_i \in \mathbb{K}$ et $b : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est une application continue.

   EXEMPLES 11
   - $y' = 5ty + \mathrm{e}^t$ *est une équation différentielle linéaire du premier ordre (ou d'ordre* 1*).*
   - $y' - 4y = \cos(2t)$ *est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.*
   - $y' = x^2y$ *est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre.*
   - $y'' = x^2y' + \dfrac{1}{x}y + (x+1)\mathrm{e}^{2x}$ *est une équation différentielle linéaire du second ordre (ou d'ordre* 2*).*
   - $y'' = y$ *est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants.*
   - $(y')^2 = 2y$ *et* $y' \times y = 1$ *ne sont pas des équations différentielles linéaires.*

2. **Les équations différentielles scalaires à variables séparables**
   Ce sont de les équations différentielles de la forme
   $$y' = g(t)h(y),$$
   où $g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $h : J \longrightarrow \mathbb{K}$ sont des applications continues.

   EXEMPLE 12 — *L'équation* $y' = \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-y}$ *est une équation différentielle scalaire à variables séparables.*

1.2.2 Équations différentielles vectorielles du premier ordre

On se place dans le cas particulier où $n = 1$.

On considère I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, U un ouvert de E et f une application continue de $I \times U$ à valeurs dans E.

DÉFINITION 13
L'équation différentielle $y' = f(t, y)$ *est appelée* ***équation différentielle vectorielle du premier ordre*** *(ou d'ordre* 1*).*

Une solution d'une équation différentielle vectorielle du premier ordre est donc en particulier une application dérivable d'un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Donnons quelques exemples d'équations différentielles vectorielles que l'on étudiera.

1. **Les équations différentielles linéaires vectorielles du premier ordre**
   • Les équations différentielles linéaires vectorielles du premier ordre sont de la forme
$$y' = a(t) \cdot y + b(t),$$
   où $a : I \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ et $b : I \longrightarrow E$ sont des applications continues.
   • L'équation différentielle **homogène** ou **sans second membre** associée à l'équation différentielle précédente est l'équation
$$y' = a(t) \cdot y.$$
   Il s'agit du cas où b est l'application nulle.
   • Si l'application a est constante, on dit que l'équation est **à coefficient constant**. Elle s'écrit donc sous la forme
$$y' = a \cdot y + b(t),$$
   où $a \in \mathcal{L}(E)$ et $b : I \longrightarrow E$ est une application continue.
   • Soient N la dimension de E et $\mathcal{B}$ une base de E. En notant $A(t) = (a_{i,j}(t))_{\substack{i=1\ldots N\\ j=1\ldots N}}$ la matrice de $a(t)$ dans la base $\mathcal{B}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_N(t) \end{pmatrix}$ le vecteur colonne des composantes de $b(t)$ dans la base $\mathcal{B}$, l'équation différentielle $y' = a(t) \cdot y + b(t)$ s'écrit sous forme matricielle
$$Y' = A(t)Y + B(t).$$
   Alors $\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{pmatrix}$ est solution de $Y' = A(t)Y + B(t)$ si et seulement si $(\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$ est solution du système différentiel linéaire scalaire du premier ordre suivant
$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1' & = & a_{11}(t)y_1 + \ldots + a_{1N}(t)y_N + b_1(t) \\ \vdots & & \\ y_N' & = & a_{N1}(t)y_1 + \ldots + a_{NN}(t)y_n + b_N(t). \end{array} \right.$$
   Remarque 14 — *En pratique, on a généralement $E = \mathbb{K}^N$ et en considérant la base canonique, on confondra alors l'endomorphisme $a(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^N)$ avec sa représentation matricielle $A(t) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ et le vecteur $b(t) \in \mathbb{K}^N$ avec le vecteur colonne $B(t) \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{K})$.*

   Exemples 15
   - $Y' = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} \ln(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *est une équation différentielle linéaire vectorielle du premier ordre.*
   - $Y' = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ 0 \end{pmatrix}$ *est une équation différentielle linéaire vectorielle du premier ordre à coefficients constants.*
   - $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} Y$ *est une équation différentielle linéaire vectorielle homogène du premier ordre à coefficients constants.*
   - $\left\{ \begin{array}{l} x' = 5x - y \\ y' = x + 3y \end{array} \right.$ *est un système d'équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre.*

2. **Les équations différentielles autonomes**
   Ce sont les équations différentielles de la forme
$$y' = f(y),$$
   où f est une application de I dans E.

   Exemple 16 — *Les équations $y' = \sqrt{y}$ et $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont des équations différentielles autonomes.*

1.2.3 De l'ordre n à l'ordre 1

Les équations différentielles scalaires d'ordre n se ramènent aux équations différentielles vectorielles du premier ordre. Ceci nous permettra en particulier de ramener l'étude de certaines équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n à celle des équations différentielles linéaires vectorielles d'ordre 1.

Plus précisément, considérons I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, J un intervalle inclus dans I, U un ouvert de $\mathbb{K}^n$ et $f : I \times U \longrightarrow \mathbb{K}$ une application continue.

Alors l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{D}^n(I,\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{D}^1\left(I,\mathbb{K}^n\right) \\ & \varphi & \longmapsto & \begin{pmatrix} \varphi \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix} \end{array}$$

induit une bijection de l'ensemble $\mathcal{S}_n(J)$ des solutions définies sur J de $y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ sur l'ensemble $\mathcal{S}_1(J)$ des solutions définies sur J de $Y' = F(t, Y)$, où

$$F : I \times U \longrightarrow \mathbb{K}^n \ ; \ \left(t, \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}\right) \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ f(t, y_0, \ldots, y_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Preuve — • Soit $\varphi \in \mathcal{S}_n(J)$. L'application $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{K}$ est donc une solution de $y^{(n)} = f\left(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ sur J. Alors φ est n fois dérivable donc $\Phi(\varphi)$ est dérivable et, pour tout $t \in J$,

$$\left(\Phi(\varphi)\right)'(t) = \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \\ \vdots \\ f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)) \end{pmatrix} = F\left(t, \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}\right) = F\left(t, \Phi(\varphi)(t)\right).$$

Donc $\Phi(\varphi) : J \longrightarrow \mathbb{K}^N$ est solution de $Y' = F(t, Y)$. D'où, $\Phi(\varphi) \in \mathcal{S}_1(J)$.

Ainsi, $\Phi\left(\mathcal{S}_n(J)\right) \subset \mathcal{S}_1(J)$.

On peut donc considérer l'application induite $\tilde{\Phi} : \mathcal{S}_n(J) \longrightarrow \mathcal{S}_1(J)$.

• L'application $\tilde{\Phi}$ est injective puisque si φ_1 et φ_2 sont des éléments de $\mathcal{S}_n(J)$ tels que $\tilde{\Phi}(\varphi_1) = \tilde{\Phi}(\varphi_2)$ alors par égalité des composantes, on a $\varphi_1 = \varphi_2$.

• Montrons que $\tilde{\Phi}$ est surjective. Soit $\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_1(J)$, une solution de $Y' = F(t, Y)$ sur l'intervalle J. Alors pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, φ_i est dérivable et pour tout $t \in J$, on a

$$\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \vdots \\ \varphi_{n-2} \\ \varphi_{n-1} \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} \varphi_0'(t) \\ \vdots \\ \varphi_{n-2}'(t) \\ \varphi_{n-1}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(t) \\ f\left(t, \varphi_0(t), \ldots, \varphi_{n-1}(t)\right) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tout $i \in [\![0, n-2]\!]$, $\varphi_i' = \varphi_{i+1}$ et pour tout $t \in J$, $\varphi_{n-1}'(t) = f(t, \varphi_0(t), \ldots, \varphi_{n-1}(t))$.

On en déduit que φ_0 est dérivable, de dérivée φ_1 elle-même dérivable, et ainsi de suite, φ_0 est n fois dérivable. et pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $\varphi_i = \varphi_0^{(i)}$.

Donc pour tout $t \in J$,

$$\varphi_0^{(n)}(t) = (\varphi_0^{(n-1)})'(t) = (\varphi_{n-1})'(t) = f\left(t, \varphi_0(t), \ldots, \varphi_{n-1}(t)\right) = f(t, \varphi_0(t), \varphi_0'(t), \ldots, \varphi_0^{(n-1)}(t)).$$

Donc $\varphi_0 : J \longrightarrow \mathbb{K}$ est une solution définie sur J de $y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, et donc $\varphi_0 \in \mathcal{S}_n(J)$.

Comme $\tilde{\Phi}(\varphi_0) = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \end{pmatrix}$, on en déduit que $\tilde{\Phi}$ est surjective.

• L'application $\tilde{\Phi}$ est donc bijective. D'où le résultat. $\square$

On pourra donc retenir que l'équation $y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ $(\mathcal{E}_n)$ est équivalente à l'équation $Y' = F(t, Y)$ $(\mathcal{E}_1)$, dans le sens où si φ est solution de $(\mathcal{E}_n)$ alors $\begin{pmatrix} \varphi \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix}$ est solution de $(\mathcal{E}_1)$ et si $\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \end{pmatrix}$ est solution de $(\mathcal{E}_1)$ alors φ_0 est solution de $(\mathcal{E}_n)$.

Exemple 17 — *L'étude de équation différentielle, d'ordre 2, $y'' + 4ty' + 2y = 0$ se ramène à celle de l'équation différentielle, d'ordre 1, $Y' = f(t, Y)$, où*

$$F\left(t, \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y_1 \\ -4ty_1 - 2y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Précisément, φ est solution de l'équation différentielle, d'ordre 2, $y'' + 4ty' + 2y = 0$ si et seulement si $\begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \end{pmatrix}$ est solution de l'équation différentielle, d'ordre 1, $Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4t \end{pmatrix} Y$.

1.3 Problème de Cauchy

Les questions naturelles qui se posent lorsque l'on étudie une équation différentielle sont de savoir trouver des solutions, mais aussi leur intervalle maximal d'existence, de savoir si on a obtenu toutes les solutions, et en particulier d'obtenir éventuellement l'unicité lorsque l'on rajoute des conditions initiales. Nous discutons dans cette partie des questions d'existence, d'unicité et d'intervalles de définition des solutions. Le calcul explicite, s'il est possible, de ces solutions fera l'objet de chapitres plus spécifiques.

Dans cette partie, on considère I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, U un ouvert de E^n et f une application continue de $I \times U$ dans E.

On s'intéresse à l'équation différentielle

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \qquad (\mathcal{E}_R)$$

1.3.1 Définition

Définition 18
Soit $(t_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \in I \times U$. On appelle ***problème de Cauchy***

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y_1, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}, \end{cases}$$

la recherche de la (ou les) solution φ de $\mathcal{E}_R$ définie sur un intervalle J contenant t_0 et telle que $\varphi(t_0) = y_0$, $\varphi'(t_0) = y_1$, … $\varphi^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$.

On dit qu'une telle solution φ satisfait à la condition initiale $y(t_0) = y_0$, … , $y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$.

Exemple 19 — *La fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $t \longmapsto 2e^{-t}$ est une solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' + y = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Remarque 20 — *Si l'équation $\mathcal{E}_R$ décrit la loi d'évolution d'un système physique au cours du temps, résoudre le problème de Cauchy revient à trouver l'évolution du système sachant connaissant son état en t_0.*