EQUA. DIFF

Chap 1. Notion d'équations différentielles

Cours 1

1. Définitions

On cherche φ telle que
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi'(t) = 0$$

$\varphi = \cos$, $\quad \varphi' = -\sin$, $\quad \varphi'' = -\cos = -\varphi$ ⚠

$$\varphi'' + \varphi = 0$$

$$G(t, y, y', \dots y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

$$y^{(n)} + \underbrace{\text{-----}}_{t,\, y,\, \dots y^{(n-1)}} = 0$$

$$y^{(n)} = \frac{1}{R(t)} g(t, y, \dots y^{(n-1)}) \quad \text{pour } R(t) \neq 0.$$

Supposons que R s'annule uniquement t_0.

Posons $I_1 =]-\infty, t_0[$, $I_2 =]t_0, +\infty[$.

$\varphi_1 \qquad \varphi_2$

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_1 & \text{sur } I_1 \\ \varphi_2 & \text{sur } I_2 \\ ? & \text{en } t_0 \end{cases}$$

? solution ?

EQUA. DIFF

Chap 1. Notion d'équations différentielles

Cours 2

2. Quelques équations différentielles particulières

1.2.1. Equations différentielles scalaires.

$$f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = a_0(t)y + a_1(t)y' + \dots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + b(t)$$

Ex 11.

- $a_0(t) = 5t$, $b(t) = e^t$
- $a_0 = 4$, $b(t) = \cos(2t)$
- $a_0(x) = x^2$, $b(\cancel{t}^{\,x}) = 0 \rightarrow$ homogène.
- $a_1(x) = x^2$, $a_0(x) = \frac{1}{x}$, $b(x) = (x+1)e^{2x}$
- $a_1 = 0$, $a_0 = 1$, $b(t) = 0$.

  $y'' = 0y' + 1y$.

Ex 12.

$g(x) = \frac{1}{x^2}$, $h(y) = e^{-y}$.

$y' = e^{-ty}$

EQUA. DIFF

Chap 1. Notion d'équations différentielles

Cours 3

2. Quelques équations différentielles particulières

1.2.2. Equations différentielles vectorielles du premier ordre

$$f(t,y) = \underbrace{\underbrace{\underbrace{a(t)}_{\in \mathcal{L}(E)}\cdot \underbrace{y}_{\in E}}_{\in E}}_{} + \underbrace{b(t)}_{\in E} \quad \in E$$

$$a(t)\cdot y = (a(t))(y) \in E$$

φ est solution de $y' = a(t)\cdot y + b(t)$

ssi $\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_N(t) \end{pmatrix}' = A(t)\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_N(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_N(t) \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}'(t)$

ssi $\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$ est solution de $Y' = A(t)Y + B(t)$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_N(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1N}(t) \\ \vdots & & \\ a_{N1}(t) & \cdots & a_{NN}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_N(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_N(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1'(t) \\ \vdots \\ \varphi_N'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t)\varphi_1(t) + \cdots + a_{1N}(t)\varphi_N(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ a_{N1}(t)\varphi_1(t) + \cdots + a_{NN}(t)\varphi_N(t) + b_N(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = 5x - y \\ y' = x + 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow Y' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} Y$$

$$y' = \underbrace{R(t)}_{=1} g(y)$$

EQUA. DIFF

Chap 1 - Notion d'équations différentielles

Cours 4

2 - Quelques équations différentielles particulières

1.2.3. De l'ordre n à l'ordre 1

$$y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)}) \qquad \text{(scalaire)} \qquad (*)$$

Soit φ solution de $(*)$ sur J.

$$\forall t \in J \quad \varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$$

$$\begin{pmatrix} \varphi(\cancel{t}) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(\cancel{t}) \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) \\ \varphi^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) \\ f(t, \varphi(t), \dots \varphi^{(n-1)}(t)) \end{pmatrix} = F\left(t, \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}\right)$$

$$F : \left(t, \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}\right) \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ f(t, y_0, \dots y_{n-1}) \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} \varphi \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix}$ solution de $Y' = F(t, Y)$.

$$y'' = \underbrace{-4ty' - 2y}_{f(t, y, y')} \quad , \quad F\left(t, \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y_1 \\ f(t, y_0, y_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ -4ty_1 - 2y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \varphi' \\ \varphi'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi' \\ -4t\varphi' - 2\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \end{pmatrix}.$$