EQUA. DIFF

Chap 1. Notion d'équations différentielles

Cours 2 (1)

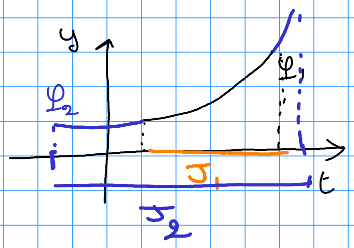
1.3. Problème de Cauchy.

1.3.2. Définition.

Ex 19 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} ; t \mapsto 2e^{-t}$. $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = -2e^{-t} = -\varphi(t)$

Donc φ est solution de $y' + y = 0$. On a $\varphi(0) = 2e^{-0} = 2$.

1.3.2. Solutions maximales et globales.



$\varphi_1 : J_1 \to \mathbb{R}$

$$y^{(n)} = f(\underset{\in I}{t}, y, \dots, y^{(n-1)}) , \quad f : I \times U \longrightarrow E$$

$\varphi : \underset{\subset I}{J} \longrightarrow E$ Si $J = I$ alors φ est une solution globale.

Prop 25 $(*)$ $\begin{cases} y' = y^2 = f(t,y) \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$ $\quad f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(t,y) \mapsto y^2$ $\quad I = \mathbb{R}$

$\varphi : t \mapsto \dfrac{y_0}{1 - y_0 t}$ est une solution de $(*)$

$\varphi'(t) = y_0 \dfrac{y_0}{(1-y_0 t)^2} = \dfrac{y_0^2}{(1-y_0 t)^2} = \varphi(t)^2$, $\quad \varphi(\underset{\uparrow}{0}) = y_0$.

Donc φ est bien solution de $(*)$. t_0 doit appartenir à l'intervalle de définition de φ.

φ est définie sur $\left]-\infty, \dfrac{1}{\underbrace{y_0}_{>0}}\right[$ $\underset{\neq I = \mathbb{R}}{}$ ~~ou $\left]\dfrac{1}{\underbrace{y_0}_{>0}}, +\infty\right[$~~. $\quad 0 \in \left]-\infty, \frac{1}{y_0}\right[$, $\quad 0 \notin \left]\frac{1}{y_0}, +\infty\right[$

Donc φ n'est pas une solution globale, mais φ est maximale car φ ne peut être prolongée sur un intervalle plus grand.

EQUA. DIFF

Chap 1. Notion d'équations différentielles

Cours 2 (2)

1.3. Problème de Cauchy.

1.3.3. Existence et unicité des solutions.

→ équations différentielles scalaires d'ordre n

↳ linéaires $y^{(n)} = a_0(t)y + \dots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + b(t)$

↳ non linéaires $y^{(n)} = f(t, y, \dots y^{(n-1)})$ où $f : I \times U \to \mathbb{K}$ (U ouvert de $\mathbb{K}^n$)

→ équations différentielles vectorielles du 1^{er} ordre.

↳ linéaires $y' = a(t) \cdot y + b(t)$

↳ non linéaires $y' = f(t, y)$ où $f : I \times U \to E$ (U ouvert de E.)

Rappel : $y^{(n)} = f(t, y, \dots y^{(n-1)})$ (scalaire) est équivalent à

$Y' = F(t, Y)$ où $F : \left(t, \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ f(t, y_1, \dots y_{n-1}) \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$y' = y^2$ → non linéaire

Ici $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ (t, y) \mapsto y^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

On peut donc applique le théorème de Cauchy-Lipschitz.

. $\varphi : t \mapsto 0$ $\quad \varphi(0) = 0$, $\quad \varphi'(t) = 0$ $\quad 3(\underbrace{\varphi(t)^2}_{0})^{1/3} = 0$

. $\varphi_0 : t \mapsto t^3$ $\quad \varphi_0(0) = 0$, $\quad \varphi_0'(t) = 3t^2$ $\quad 3(\underbrace{\varphi_0(t)}_{t^3}{}^2)^{1/3} = 3(t^6)^{1/3} = 3t^2$

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ (t, y) \mapsto 3(y^2)^{1/3}$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Donc le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas.

EQUA. DIFF

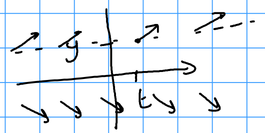
Chap 1. Notion d'équations différentielles

Cours 2 (3)

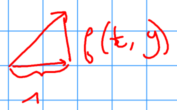
1.4. Interprétation géométrique.

Champ de vecteurs

$y' = -\frac{1}{2}y = f(t,y)$ où $f(t,y) = -\frac{1}{2}y$.



Tracer un vecteur de pente $f(t,y)$: $\begin{pmatrix} 1 \\ f(t,y) \end{pmatrix}$

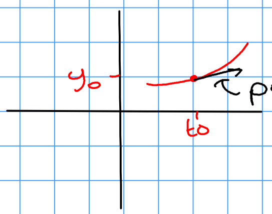


En $(0,0)$, $\begin{pmatrix} 1 \\ f(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

En $(0,1)$, $\begin{pmatrix} 1 \\ f(0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,5 \end{pmatrix}$

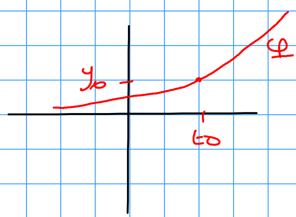
En $(0,-1)$, $\begin{pmatrix} 1 \\ f(0,-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$

φ solution de $y' = f(t,y)$ telle que $\varphi(t_0) = y_0$.



pente $\varphi'(t_0) = f(t_0, \varphi(t_0)) = f(t_0, y_0)$.

$(*) \begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution maximale.



φ solution de $(*)$.