Chapitre 2 Équations différentielles scalaires

Dans tout ce chapitre, n désigne un entier naturel non nul, $\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou celui des nombres complexes $\mathbb{C}$.

2.1 Équations différentielles linéaires scalaires

Dans cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

2.1.1 Résultats généraux

On s'intéresse à l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n

$$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + b(t), \tag{E}$$

où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $b : I \longrightarrow \mathbb{K}$ sont des fonctions continues.

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions maximales de l'équation (E) et $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions maximales de l'équation homogène associée

$$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}. \tag{E_h}$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire (voir chapitre 1), les solutions des équations (E) et (E_h) sont globales et définies sur I.

Proposition 1
L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène (E_h) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$.

Preuve — L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de (E_h) est le noyau de l'application linéaire

$$\begin{array}{rccl} \ell : & \mathcal{C}^n(I,\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(I,\mathbb{K}) \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi^{(n)} - a_0(t)\varphi - \ldots - a_{n-1}(t)\varphi^{(n-1)} \end{array}.$$

$\mathcal{S}_h$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$.

□

Proposition 2
L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation (E) est un espace affine dirigé par l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène (E_h) :

$$\mathcal{S} = \varphi_p + \mathcal{S}_h,$$

où $\varphi_p \in \mathcal{S}$.

Preuve — D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, l'ensemble $\mathcal{S}$ est non vide. Il existe donc un élément φ_p de $\mathcal{S}$.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$. Alors $\varphi \in \mathcal{S}$ si et seulement si, pour tout $t \in I$,

$$\varphi^{(n)}(t) = a_0(t)\varphi(t) + \ldots + a_{n-1}(t)\varphi^{(n-1)}(t) + b(t),$$

soit encore, si et seulement si, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned}(\varphi - \varphi_p)^{(n)}(t) = \varphi^{(n)}(t) - \varphi_p^{(n)}(t) &= a_0(t)\varphi(t) + \ldots + a_{n-1}(t)\varphi^{(n-1)}(t) + b(t) - \left(a_0(t)\varphi_p(t) + \ldots + a_{n-1}(t)\varphi_p^{(n-1)}(t) + b(t)\right) \\ &= a_0(t)\left(\varphi - \varphi_p\right)(t) + \ldots + a_{n-1}(t)\left(\varphi - \varphi_p\right)^{(n-1)}(t).\end{aligned}$$

Donc $\varphi \in \mathcal{S}$ si et seulement si $\varphi - \varphi_p \in \mathcal{S}_h$.

Donc $\mathcal{S} = \varphi_p + \mathcal{S}_h$. □

On redémontrera ce théorème dans certains cas sans utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, que nous n'avons pas démontré dans le premier chapitre.

En d'autres termes, si l'on connait une solution particulière φ_p de (E), alors l'ensemble des solutions de (E) est $\mathcal{S} = \varphi_p + \mathcal{S}_h$. Ainsi, pour trouver l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E), on cherche l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène associée (E_h) et une solution particulière de (E).

MÉTHODE 3 — *Pour résoudre une équation différentielle linéaire scalaire non homogène (E), on procédera de la façon suivante :*

1. *On identifie le type de l'équation différentielle (E) étudiée.*
2. *On donne l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène associée (E_h).*
3. *On cherche une solution particulière φ_p de l'équation (E)*
4. *On conclut en donnant l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation (E) : $\mathcal{S} = \varphi_p + \mathcal{S}_h$.*

Le principe de superposition des solutions énoncé ci-dessous est très utile en pratique car il permet de rechercher une solution particulière en décomposant le second membre en des membres plus simples.

PROPOSITION 4 (Principe de superposition)
Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ des éléments de $\mathbb{K}$ et $b_1, \ldots, b_N$ des applications continues de I dans $\mathbb{K}$. Supposons que pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, φ_i est une solution particulière de l'équation

$$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + b_i(t).$$

Alors $\lambda_1\varphi_1 + \ldots \lambda_N\varphi_N$ est une solution particulière de l'équation

$$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \lambda_1 b_1(t) + \ldots + \lambda_N b_N(t).$$

Preuve — Considérons l'application linéaire

$$\begin{array}{rccl} \ell : & \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(I, \mathbb{K}) \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi^{(n)} - a_0(t)\varphi - \ldots - a_{n-1}(t)\varphi^{(n-1)} \end{array}.$$

Par hypothèse, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\ell(\varphi_i) = b_i$.

Par linéarité de ℓ, on a alors $\ell(\lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_N\varphi_N) = \lambda_1\ell(\varphi_1) + \ldots + \lambda_N\ell(\varphi_N) = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_N b_N$.

Donc $\lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_N\varphi_N$ est une solution particulière de

$$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \lambda_1 b_1(t) + \ldots + \lambda_N b_N(t).$$

□

EXEMPLE 5 — *Pour trouver une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle*

$$y' + y = \cos(x) + (x+1)\mathrm{e}^{-x},$$

on peut donc chercher une solution particulière φ_1 de l'équation différentielle $y' + y = \cos(x)$ puis une solution particulière φ_2 de l'équation différentielle $y' + y = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$, et enfin les additionner. Ainsi, au lieu d'un calcul compliqué, on se ramène à deux calculs plus simples.

2.1.2 Équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre

On s'intéresse aux équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre de la forme

$$y' = a(t)y + b(t), \qquad (E_1)$$

où a et b sont des applications de I dans $\mathbb{K}$ continues.

2.1.2.a. Ensemble des solutions de l'équation homogène

PROPOSITION 6
Soient $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et A une primitive de a sur I.

1. *L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène $y' = a(t)y$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1 engendré par l'application $I \longrightarrow \mathbb{K}$; $t \longmapsto \exp(A(t))$:*

$$\mathcal{S}_h = \{I \longrightarrow \mathbb{K} \ ; \ t \longmapsto \lambda \exp(A(t)) \mid \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

2. *Soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = a(t)y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

possède une et une seule solution définie sur I, qui est l'application

$$I \longrightarrow \mathbb{K} \; ; \; t \longmapsto y_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right).$$

Preuve —

1. $\triangleright$ Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Posons $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{K} \; ; \; t \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{A(t)}$. Alors, φ est dérivable et pour tout $t \in I$, $\varphi'(t) = \lambda a(t)\mathrm{e}^{A(t)} = a(t)\varphi(t)$.
   Donc φ est solution de $y' = a(t)y$.
   $\triangleleft$ Réciproquement, soit φ une solution de l'équation $y' = a(t)y$. Posons, pour tout $t \in I$, $\psi(t) = \varphi(t)e^{-A(t)}$.
   Alors, φ étant dérivable, ψ l'est aussi et pour tout $t \in I$, $\psi'(t) = e^{-A(t)}\left(\varphi'(t) - a(t)\varphi(t)\right) = e^{-A(t)} \times 0 = 0$.
   Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $t \in I$, $\psi(t) = \lambda$.
   Donc pour tout $t \in I$, $\varphi(t)e^{-A(t)} = \lambda$, soit $\varphi(t) = \lambda \mathrm{e}^{A(t)}$.
   D'où le résultat.
2. D'après le premier point, $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est solution du problème de Cauchy si et seulement si pour tout $t \in I$, $\varphi(t) = \lambda \mathrm{e}^{A(t)}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\varphi(t_0) = y_0$, soit si et seulement si $\lambda = y_0 \mathrm{e}^{-A(t_0)}$.
   Il existe donc une unique solution au problème de Cauchy, qui est l'application

$$I \longrightarrow \mathbb{K} \; ; \; t \longmapsto y_0 \mathrm{e}^{A(t) - A(t_0)} = y_0 \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s}.$$

□

Remarque 7 — *Dans le cas particulier où a est une constante, les solutions de l'équation homogène $y' = ay$ sont les fonctions $I \longrightarrow \mathbb{K} \; ; \; t \longmapsto \lambda e^{at}$, où $\lambda \in \mathbb{K}$.*

Exemples 8

- *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$y' = \frac{1}{1+t^2} y., \tag{1}$$

  – Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène scalaire du premier ordre à coefficients continus sur $\mathbb{R}$.*

  –Solutions de l'équation homogène : *L'application $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ l'application*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \arctan(t).$$

  L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de (1) est donc le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1 engendré par la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longrightarrow \exp(\arctan(t))$:

$$\mathcal{S}_h = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \lambda \exp(\arctan(t)) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- *Déterminons sur $\mathbb{R}$ la solution du problème de Cauchy* $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{1+t^2} y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

  D'après le point précédent, on connaît l'ensemble des solutions de l'équation (1), elles sont de la forme $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \lambda \exp(\arctan(t))$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
  La condition initiale $y(0) = 1$ donne alors $\lambda = 1$.
  Donc l'unique solution de ce problème de Cauchy sur $\mathbb{R}$ est l'application

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \exp(\arctan(t)).$$

2.1.2.b. Ensemble des solutions de l'équation avec second membre

Proposition 9
Soient a et b deux éléments de $\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$.

1. *L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $y' = a(t)y + b(t)$ (E_1) est un espace affine de dimension 1 dirigé par l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène :*
$$\mathcal{S} = \{I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto \varphi_p(t) + \lambda \exp(A(t)) \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \varphi_p + \mathcal{S}_h,$$
où φ_p est une solution particulière de (E_1).
2. *Soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy*
$$\begin{cases} y' = a(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$
possède une et une seule solution définie sur I, qui est l'application
$$I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto \int_{t_0}^{t} b(s)\mathrm{e}^{\int_s^t a(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}s + y_0\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s}.$$

Preuve — On démontre ainsi le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire dans le cas linéaire scalaire d'ordre 1.

1. D'après le paragraphe précédent, les solutions de l'équation homogène $y' = a(t)y$ sont de la forme $t \longmapsto \lambda\mathrm{e}^{A(t)}$, où $\lambda \in \mathbb{K}$ et A est une primitive de a sur I.
La *méthode de variation de la constante* consiste à chercher une solution de l'équation (E_1) sous la forme $\varphi(t) = \psi(t)\mathrm{e}^{A(t)}$, où ψ est une fonction de I dans $\mathbb{K}$. Ce principe de résolution est appelé *méthode de variation de la constante.*
Soit $t_0 \in I$. Soit φ une fonction de I dans $\mathbb{K}$ dérivable. Posons, pour tout $t \in I$, $\psi(t) = \varphi(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$, de sorte que $\varphi(t) = \psi(t)\mathrm{e}^{A(t)}$.
φ étant dérivable, ψ l'est aussi et pour tout $t \in I$, $\varphi'(t) = a(t)\psi(t)\mathrm{e}^{A(t)} + \psi'(t)\mathrm{e}^{A(t)} = a(t)\varphi(t) + \psi'(t)\mathrm{e}^{A(t)}$.
Donc $\varphi \in \mathcal{S}$ si et seulement si, pour tout $t \in I$, $\psi'(t)\mathrm{e}^{A(t)} = b(t)$, soit, si et seulement si, pour tout $t \in I$, $\psi'(t) = b(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$.
L'application $t \longmapsto b(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$ étant continue sur I, $\varphi \in \mathcal{S}$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $t \in I$, $\psi(t) = \int_{t_0}^t b(s)\mathrm{e}^{-A(s)}\mathrm{d}s + \lambda$, i.e. $\varphi(t) = \mathrm{e}^{A(t)}\int_{t_0}^t b(s)\mathrm{e}^{-A(s)}\mathrm{d}s + \lambda\mathrm{e}^{A(t)}$.
Ainsi, $\mathcal{S}$ est l'ensemble des applications de la forme
$$\varphi_\lambda : I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto \underbrace{\mathrm{e}^{A(t)}\int_{t_0}^t b(s)\mathrm{e}^{-A(s)}\mathrm{d}s}_{\varphi_0 \text{ solution particulière de } (E_1)} + \underbrace{\lambda\mathrm{e}^{A(t)}}_{\in\mathcal{S}_h}.$$
On en déduit donc le premier point.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. En reprenant les notations précédentes, φ_λ est solution du problème de Cauchy si et seulement si $\varphi_\lambda(t_0) = \lambda\mathrm{e}^{A(t_0)} = y_0$, soit encore, si et seulement si $\lambda = y_0\mathrm{e}^{-A(t_0)}$.
Il existe donc une unique solution au problème de Cauchy, qui est l'application
$$I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto \int_{t_0}^t b(s)\mathrm{e}^{A(t)-A(s)}\mathrm{d}s + y_0\mathrm{e}^{A(t)-A(t_0)} = \int_{t_0}^t b(s)\mathrm{e}^{\int_s^t a(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}s + y_0\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s}.$$

□

En pratique, l'expression de la solution du problème de Cauchy donnée dans la proposition précédente ne sera pas utilisée telle quelle mais la démarche pour l'obtenir pourra être employée. On parle de *méthode de variation de la constante.*

2.1.2.c. Détermination pratique d'une solution particulière

Nous savons résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E_1), il reste maintenant à expliquer comment trouver une solution particulière. On rappelle que l'on peut utiliser le principe de superposition des solutions pour simplifier la recherche d'une solution particulière.

Parfois, on connaît une solution particulière, parce qu'elle apparaît de façon évidente ou qu'elle est suggérée dans un énoncé. Dans ce cas, il ne reste plus qu'à appliquer la proposition 9.

EXEMPLE 10 — *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$y' + t^2 y = t^2. \tag{2}$$

- Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients et second membre continus sur $\mathbb{R}$.*
- Solutions de l'équation homogène : *L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (2) est*

$$\mathcal{S}_h = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda \exp\left(-\frac{t^3}{3}\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- Solution particulière de l'équation : *La fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto 1$ est une solution particulière évidente de (2).*
- Conclusion : *L'ensemble des solutions de l'équation (2) est donc*

$$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto 1 + \lambda \exp\left(-\frac{t^3}{3}\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Si aucune solution évidente n'apparaît, on peut utiliser la méthode de variation de la constante, qui reprend la démonstration du point 1. de la proposition 9.

MÉTHODE 11 (Méthode de variation des constantes) — *Cette méthode permet d'obtenir l'expression d'une solution particulière de l'équation (E_1).*

1. *On sait que les solutions de l'équation homogène associée sont de la forme $t \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{A(t)}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ et A désigne une primitive de a. On cherche alors une solution particulière sous la forme $\varphi_p(t) = \psi(t)\mathrm{e}^{A(t)}$ où ψ est une fonction dérivable de I dans $\mathbb{K}$.*
2. *En remplaçant dans l'équation (E_1) et après simplification, on obtient que φ_p est solution de (E_1) si et seulement si $\psi'(t)\mathrm{e}^{A(t)} = b(t)$, soit finalement $\psi'(t) = b(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$.*
3. *On obtient alors ψ par primitivation, et donc l'expression de φ_p.*

REMARQUE 12 — *Notons que la méthode de variation de la constante donne en fait plus qu'une simple solution particulière de (E_1), elle donne exactement toutes les solutions.*

EXEMPLE 13 — *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$y' + \frac{t}{1+t^2} y = \frac{1}{1+t^2} \tag{3}$$

- Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients et second membre continus sur $\mathbb{R}$.*
- Solutions de l'équation homogène : *Pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$\int_0^t \frac{-s}{1+s^2} \mathrm{d}s = -\frac{1}{2} \ln\left(1+t^2\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right).$$

  L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (3) est donc

$$\mathcal{S}_h = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \frac{\lambda}{\sqrt{1+t^2}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- Solution particulière : *Appliquons la méthode de variation de la constante.*
  Cherchons une solutions particulière φ_p de (3) sous la forme $\varphi_p(t) = \dfrac{\psi(t)}{\sqrt{1+t^2}}$, où ψ est une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
  Alors φ_p est solution de l'équation si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\psi'(t)}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{1+t^2},$$

soit encore, si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.
Par exemple, choisissons pour ψ *la fonction* $\psi : t \longmapsto \operatorname{argsh}(t)$.
La fonction $\varphi_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \dfrac{\operatorname{argsh}(t)}{\sqrt{1+t^2}}$ *est alors une solution particulière de (3).*

– Conclusion : *L'ensemble des solutions de (3) est donc*

$$\mathcal{S} = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \frac{\operatorname{argsh}(t) + \lambda}{\sqrt{1+t^2}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Enfin, notons que dans le cas particulier où l'équation s'écrit sous la forme

$$y' + a_0 y = P(t)e^{\alpha t},$$

où a_0 et α sont des éléments de $\mathbb{K}$ et P est un polynôme, on peut se passer de la méthode de variation de la constante pour obtenir plus rapidement une solution particulière en utilisant le résultat suivant. Bien sûr, la méthode de variation de la constante peut toujours être utilisée !

Proposition 14
Soient a_0 *et* α *des éléments de* $\mathbb{K}$ *et* P *une application polynomiale. L'équation différentielle*

$$y' + a_0 y = P(t)\mathrm{e}^{\alpha t}$$

admet une solution particulière de la forme

$$I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto \begin{cases} Q(t)\mathrm{e}^{\alpha t} & \textit{si } \alpha \textit{ n'est pas racine de } X + a_0 \\ tQ(t)\mathrm{e}^{\alpha t} & \textit{sinon,} \end{cases},$$

où Q *est une application polynomiale de même degré que* P.

Exemple 15 — *Résolvons sur* $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle*

$$y' - 2y = t\mathrm{e}^t. \tag{4}$$

– Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients constants et second membre continu.*
– Solutions de l'équation homogène : *L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (4) est*
$$\mathcal{S}_h = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda\mathrm{e}^{2t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$
– Solution particulière : *Les coefficients de l'équation (4) sont constants et le second membre est de la forme polynôme-exponentielle. On peut donc chercher une solution particulière de l'équation différentielle* $y' - 2y = t\mathrm{e}^t$ *sous la forme*
$$\varphi_p(t) = (at + b)\mathrm{e}^t$$
(car ici $\alpha = 1$ *n'est pas racine de* $X - 2$ *et* $P(t) = t$ *est de degré 1).*
Alors φ_p *est solution de l'équation si et seulement si, pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_p'(t) - 2\varphi_p(t) = t\mathrm{e}^t$. *Après calculs, on trouve* $a = b = -1$ *et donc* $\varphi_p(x) = (-t-1)\mathrm{e}^t$.
– Conclusion *L'ensemble des solutions de l'équation est donc*
$$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \mapsto (-t-1)\mathrm{e}^t + \lambda\mathrm{e}^{2t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Remarque 16 — *Soient* a_0, β *et* ω *des nombres réels et* P *une application polynomiale à coefficients réels. Si le second membre est de la forme* $t \longmapsto P(t)\mathrm{e}^{\beta t}\cos(\omega t)$ *(resp.* $\longmapsto P(t)\mathrm{e}^{\beta t}\sin(\omega t)$*), on peut chercher une solution particulière complexe de l'équation* $y' + a_0 y = P(t)\mathrm{e}^{(\beta + i\omega)t}$ *puis en prendre sa partie réelle (resp. imaginaire).*

Preuve — *Supposons que* $\varphi_{p,\mathbb{C}}$ *soit une solution particulière complexe de* $y' + a_0 y = P(t)\mathrm{e}^{(\beta+i\omega)t}$.

Alors $\mathrm{Re}(\varphi_{p,\mathbb{C}})' + a_0\mathrm{Re}(\varphi_{p,\mathbb{C}}) = \mathrm{Re}\left(\varphi_{p,\mathbb{C}}' + a_0\varphi_{p,\mathbb{C}}\right) = \mathrm{Re}\left(P(t)\mathrm{e}^{(\beta+i\omega)t}\right) = P(t)\mathrm{e}^{\beta t}\cos(\omega t)$.

Donc $\mathrm{Re}(\varphi_{p,\mathbb{C}})$ *est une solution particulière de* $y' + a_0 y = P(t)\mathrm{e}^{\beta t}\cos(\omega t)$. □

Exemple 17 — *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$y' + y = 2\cos(t) + \sin(t). \tag{5}$$

- Identification ; *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients constants et second membre continu sur $\mathbb{R}$.*
- Solutions de l'équation homogène : *L'ensemble des solutions de l'équation homogène est*

$$\mathcal{S}_h = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda e^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- Solution particulière : *Nous allons utiliser le principe de superposition des solutions.*
  - *Commençons par chercher une solution particulière complexe de $y' + y = e^{it}$ sous la forme $\varphi_{p,\mathbb{C}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\ ;\ t \longmapsto c\, e^{it}$, où $c \in \mathbb{C}$ (car i n'est pas racine de $X+1$ et P est de degré 0). Après calculs, on trouve $c = \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{2}$ et donc $\varphi_{p,\mathbb{C}}(t) = \dfrac{1-i}{2} e^{it}$.*
  - *Une solution particulière de $y' + y = \cos(t)$ est donc $\varphi_{p,1} = \mathrm{Re}(\varphi_{p,\mathbb{C}})$, c'est-à-dire*

$$\varphi_{p,1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t).$$

  - *Une solution particulière de $y' + y = \sin(t)$ est donc $\varphi_{p,2} = \mathrm{Im}(\varphi_{p,\mathbb{C}})$, c'est-à-dire*

$$\varphi_{p,2} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto -\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t).$$

  - *Par le principe de superposition des solutions, une solution particulière de (5) est donc*

$$\varphi_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto 2\varphi_{p,1}(t) + \varphi_{p,2}(t) = \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{3}{2}\sin(t).$$

- Conclusion : *L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de (5) est donc*

$$\mathcal{S} = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{3}{2}\sin(t) + \lambda e^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

2.1.2.d. Raccordements de solutions

Jusqu'ici, nous avons étudié les équations différentielles dites résolues. Voyons comment résoudre celles qui ne sont pas sous forme résolue.

On s'intéresse donc à la résolution des équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre de la forme

$$a(t)y' + b(t)y = c(t), \tag{$E_{1,nr}$}$$

où a, b et c sont des applications de I dans $\mathbb{K}$ continues, d'équation différentielle homogène associée

$$a(t)y' + b(t)y = 0. \tag{$E_{1h,nr}$}$$

Soit J un intervalle inclus dans I. On s'intéresse aux solutions de ces équations, définies sur l'intervalle J.

• Premier cas : l'application a ne s'annule pas sur l'intervalle J.

Alors, en divisant par $a(t)$, les équations se ramènent aux équations résolues suivantes, que l'on sait résoudre :

$$y' = -\frac{b(t)}{a(t)}y + \frac{c(t)}{a(t)}$$

et

$$y' = -\frac{b(t)}{a(t)}y.$$

L'ensemble des solutions de $(E_{1h,nr})$ est donc un espace vectoriel de dimension 1 et l'ensemble des solutions de $(E_{1,nr})$ est un espace affine de dimension 1 dirigé par l'ensemble des solutions de l'équation homogène.

• SECOND CAS : l'application a s'annule sur l'intervalle J.

Alors, nous allons voir sur des exemples que les résultats précédents sur les équations résolues, comme le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, peuvent tomber en défaut.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène $(E_{1h,nr})$ est un espace vectoriel. Cependant, sa dimension n'est pas nécessairement égale à 1. De plus, l'ensemble des solutions de l'équation $(E_{1,nr})$ est soit le vide, soit un espace affine dirigé par l'ensemble des solutions de l'équation homogène. Là encore, on ne peut rien dire sur sa dimension.

Supposons par exemple que a s'annule en un nombre fini de points t_0, t_1, …, t_N de l'intervalle J. Posons, pour tout $i \in [\![0, N-1]\!]$, $J_i =]t_i, t_{i+1}[$. Alors $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{N-1} J_i = J \setminus \{t_0, \ldots, t_N\}$ et l'application a ne s'annule pas sur J_i. Pour résoudre l'équation $(E_{1,nr})$ sur J, nous procéderons de la manière suivante.

MÉTHODE 18 —

1. Résolution de $(E_{1,nr})$ sur les intervalles de non annulation de a : *Pour tout $i \in [\![0, N-1]\!]$, on résout l'équation $(E_{1,nr})$ sur l'intervalle J_i en se ramenant à une équation résolue, puisque a ne s'annule pas sur J_i.*
2. Résolution de $(E_{1,nr})$ sur J : *On cherche ensuite l'ensemble des solutions de $(E_{1,nr})$ sur J.*
   (a) Raccordement des solutions aux points t_i.
   On considère φ une (éventuelle[1]) solution de $(E_{1,nr})$ sur J. Alors, pour tout $i \in [\![0, N-1]\!]$, φ est solution de $(E_{1,nr})$ sur l'intervalle J_i et on en connaît donc son expression explicite sur J_i d'après le premier point : $\varphi = \varphi_i$ où φ_i est solution de $(E_{1,nr})$ sur J_i.
   φ étant solution de $(E_{1,nr})$, elle est continue sur J et on va donc chercher à prolonger par continuité aux points t_0, …, t_N la fonction
   $$J \setminus \{t_0, \ldots, t_N\} \longrightarrow \mathbb{K} \;;\; t \longmapsto \varphi_i(t) \text{ si } t \in J_i,$$
   qui coïncide avec φ sur $J \setminus \{t_0, \ldots, t_N\}$. On détermine alors les valeurs possibles de φ aux points t_i. On obtient ainsi l'expression de φ sur J.
   (b) *Réciproquement, on vérifie que la fonction φ ainsi obtenue est dérivable sur J, en particulier aux points t_i, et qu'elle vérifie l'équation différentielle $(E_{1,nr})$, en particulier aux points t_i. On obtient ainsi l'ensemble des solutions sur J de l'équation différentielle $(E_{1,nr})$.*

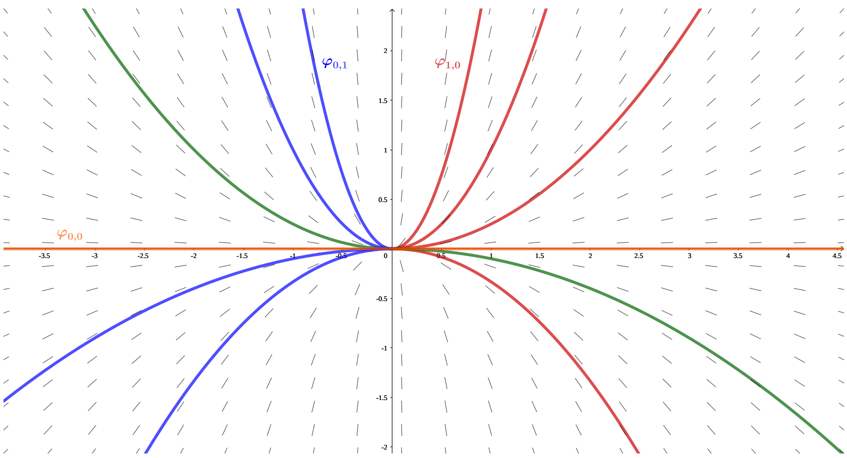
EXEMPLE 19 — *Déterminons l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle*
$$ty' - ky = 0 \tag{6}$$
avec $k = 2$, $k = 1$ ou $k = \frac{1}{2}$.

- Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène scalaire du premier ordre à coefficients continus, sous forme non résolue dont le coefficient t de y' s'annule en 0.*
- Résolution sur les intervalles de non annulation de t : *Posons $J_1 = \mathbb{R}_+^*$ et $J_2 = \mathbb{R}_-^*$. Soit $i \in \{1, 2\}$.*
  - Identification : *La résolution de l'équation $ty' - ky = 0$ sur J_i se ramène à celle de l'équation $y' = \frac{k}{t}y$ sur J_i car t ne s'annule pas sur J_i. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire homogène du premier ordre à coefficients continus sur J_i.*
  - Résolution de l'équation (homogène) : *Une primitive de $t \longmapsto \frac{k}{t}$ est par exemple l'application $t \longmapsto k\ln(|t|) = \ln\left(|t|^k\right)$. Alors $\exp\left(\ln\left(|t|^k\right)\right) = |t|^k$.*
  L'ensemble des solutions sur J_i de l'équation homogène est donc
  $$\mathcal{S}_h = \left\{J_i \longrightarrow \mathbb{R} \;;\; t \longmapsto \lambda|t|^k \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

1. Dans le cas de l'équation homogène, on sait qu'il existe des solutions car l'ensemble des solutions de $(E_{1h,nr})$ est un espace vectoriel. Sinon, on n'est pas sûr qu'il en existe

– Résolution de l'équation sur $\mathbb{R}$:
  – Raccordement des solutions au point 0 :
    Soit φ une solution de (6) définie sur $\mathbb{R}$. D'après le point précédent, il existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que
    $$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda_1 |t|^k & si\ t > 0 \\ \lambda_2 |t|^k & si\ t < 0 \end{cases} .$$
    φ étant continue en 0, on a $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi(t) = \lim\limits_{t\to 0^-} \varphi(t) = \varphi(0)$.
    Or $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} \lambda_1|t|^k = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0^-} \varphi(t) = \lim\limits_{t\to 0^-} \lambda_2|t|^k = 0$. On en déduit donc que $\varphi(0) = 0$.
    Donc nécessairement, φ est définie par
    $$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda_1 |t|^k & si\ t \geq 0 \\ \lambda_2 |t|^k & si\ t < 0 \end{cases} . \tag{7}$$
  – Étude réciproque : *Réciproquement, soient λ_1 et λ_2 des réels et soit $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ l'application donnée par (7). Étudions la dérivabilité de $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ et regardons si elle vérifie l'équation (6) sur $\mathbb{R}$.*
    La restriction de φ aux intervalles ouverts J_1 et J_2 est dérivable, donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et vérifie l'équation différentielle (6) en tout point de $\mathbb{R}^*$. Regardons au point 0.
    — 1^{er} *cas : $k = 2$.*
      On a
      $$\frac{\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(t) - \varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(0)}{t} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1 t^2 - 0}{t} = \lambda_1 t & \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0 \\ \dfrac{\lambda_2 (-t)^2 - 0}{t} = \lambda_2 t & \xrightarrow[t\to 0^-]{} 0 \end{cases} .$$
      Donc $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ est dérivable en 0 de dérivée $\varphi'_{\lambda_1,\lambda_2}(0) = 0$.
      De plus, on a $0\varphi'_{\lambda_1,\lambda_2}(0) - 2\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(0) = 0$ donc $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ est solution de l'équation (6) en 0 et donc sur $\mathbb{R}$ d'après ce qui précède.
      Conclusion :*L'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de $ty' - 2y = 0$ est donc*
      $$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
      Notons que pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, on a $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2} = \lambda_1\varphi_{1,0} + \lambda_2\varphi_{0,1}$, donc $\mathcal{S} = \mathrm{vect}(\varphi_{1,0}, \varphi_{0,1})$ et la famille $(\varphi_{1,0}, \varphi_{0,1})$ est libre. $\mathcal{S}$ est donc un espace vectoriel de dimension 2.

      Sur le champ de vecteurs ci-dessous, on a tracé des courbes intégrales de l'équation $ty' - 2y = 0$ définies sur $\mathbb{R}_-^*$ en bleu, sur $\mathbb{R}_+^*$ en rouge, et définies sur tout $\mathbb{R}$ en vert. La fonction nulle, solution sur $\mathbb{R}$, est tracée en orange. Les courbes intégrales définies sur tout $\mathbb{R}$ sont des combinaisons linéaires des fonctions $\varphi_{1,0}$ et $\varphi_{0,1}$.



— $2^{ème}$ *cas :* $k = 1$.

On a

$$\frac{\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(t) - \varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(0)}{t} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1 t - 0}{t} = \lambda_1 & \xrightarrow[t \to 0^+]{} \lambda_1 \\ \dfrac{\lambda_2(-t) - 0}{t} = -\lambda_2 & \xrightarrow[t \to 0^-]{} -\lambda_2 \end{cases}.$$

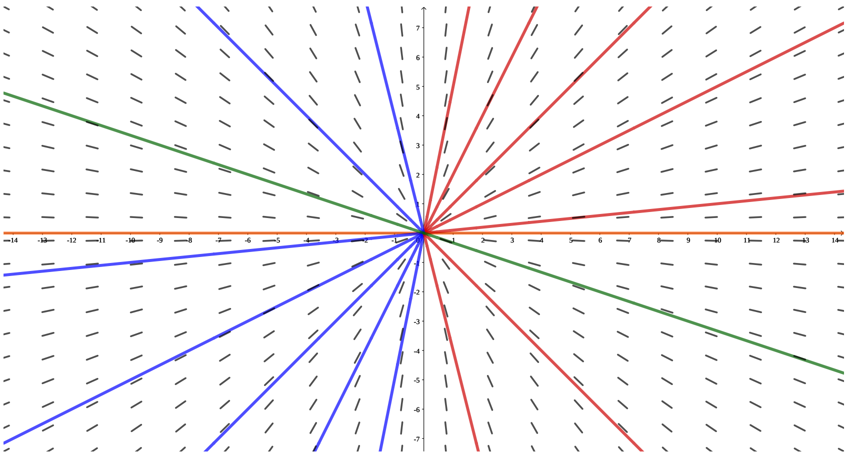
Donc $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ *est dérivable en* 0 *si et seulement si* $\lambda_1 = -\lambda_2$*, et dans ce cas,* $\varphi'_{\lambda_1,\lambda_2}(0) = \lambda_1$*. On a alors pour tout* $t \in \mathbb{R}$*,* $\varphi_{\lambda_1,-\lambda_1}(t) = \lambda_1 t$ *et* $0\varphi'_{\lambda_1,-\lambda_1}(0) - 2\varphi_{\lambda_1,-\lambda_1}(0) = 0$*. Donc* $\varphi_{\lambda_1,-\lambda_1}$ *est solution de (6) en* 0 *et donc sur* $\mathbb{R}$*.*

Conclusion : *L'ensemble des solutions sur* $\mathbb{R}$ *de* $ty' - y = 0$ *est donc*

$$\mathcal{S} = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda_1 t \mid \lambda_1 \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathcal{S}$ *est donc un espace vectoriel de dimension* 1.

Sur le champ de vecteurs ci-dessous, on a tracé des courbes intégrales de l'équation $ty' - y = 0$ *définies sur* $\mathbb{R}_-^*$ *en bleu, sur* $\mathbb{R}_+^*$ *en rouge, et définies sur tout* $\mathbb{R}$ *en vert. La fonction nulle, solution sur* $\mathbb{R}$*, est tracée en orange. Les courbes intégrales définies sur* $\mathbb{R}$ *sont des droites.*



— $3^{ème}$ *cas :* $k = \dfrac{1}{2}$.

On a

$$\frac{\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(t) - \varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(0)}{t} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1\sqrt{t} - 0}{t} = \dfrac{\lambda_1}{\sqrt{t}} & \xrightarrow[t \to 0^+]{} \begin{cases} +\infty \text{ si } \lambda_1 > 0 \\ 0 \text{ si } \lambda_1 = 0 \\ -\infty \text{ si } \lambda_1 < 0 \end{cases} \\ \dfrac{\lambda_2\sqrt{-t} - 0}{t} = -\dfrac{\lambda_2}{\sqrt{-t}} & \xrightarrow[t \to 0^-]{} \begin{cases} -\infty \text{ si } \lambda_2 > 0 \\ 0 \text{ si } \lambda_2 = 0 \\ +\infty \text{ si } \lambda_2 < 0 \end{cases} \end{cases}.$$

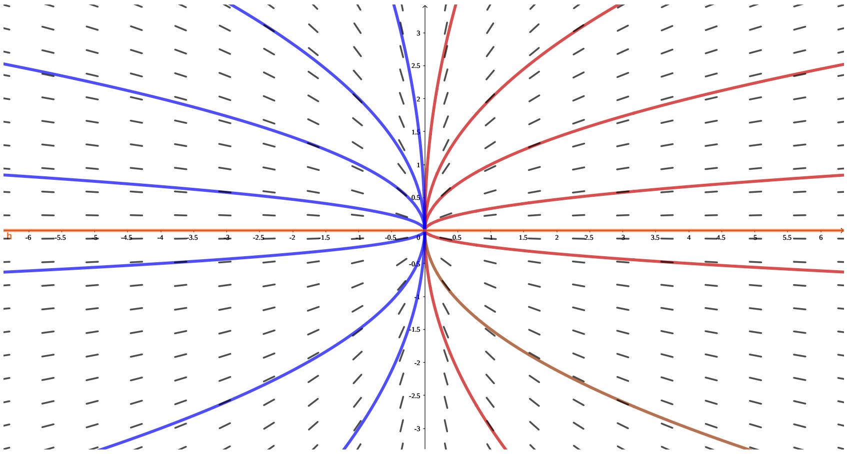
Donc $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ *est dérivable en* 0 *si et seulement si* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$*, soit encore, si et seulement si* $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2} = 0$*. Donc* $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ *est l'application nulle qui est bien solution sur* $\mathbb{R}$ *de (6).*

Conclusion : *L'ensemble des solutions définies sur* $\mathbb{R}$ *de* $ty' - \dfrac{1}{2}y = 0$ *est donc*

$$\mathcal{S} = \{0_{\mathbb{R}}\}.$$

$\mathcal{S}$ *est donc un espace vectoriel de dimension* 0.

Sur le champ de vecteurs ci-dessous, on a tracé des courbes intégrales de l'équation $ty' - \dfrac{1}{2}y = 0$ *définies sur* $\mathbb{R}_-^*$ *en bleu et sur* $\mathbb{R}_+^*$ *en rouge. Seule la fonction nulle (tracée en orange) est solution sur* $\mathbb{R}$*. Il n'y a pas de raccordement dérivable possible en* 0 *entre les courbes bleues et rouges, et donc pas de courbes intégrales sur* $\mathbb{R}$*.*



Remarque 20 — *De cette étude, on en déduit que le problème de Cauchy* $\left\{\begin{array}{l} ty'-2y=0 \\ y(0)=0 \end{array}\right.$ *admet une infinité de solutions alors que le problème de Cauchy* $\left\{\begin{array}{l} ty'-2y=0 \\ y(0)=1 \end{array}\right.$ *n'en admet aucune.*

Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire tombe donc en défaut en $t=0$, point en lequel le coefficient de y' s'annule.

Exemple 21 — *Déterminons l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation*

$$t^2y' - ty = 1. \tag{8}$$

- Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients continus, sous forme non résolue dont le coefficient t^2 de y' s'annule en 0.*
- Résolution de l'équation sur les intervalles de non annulation de t^2 : *Posons $J_1 = \mathbb{R}_+^*$ et $J_2 = \mathbb{R}_-^*$. Soit $i \in \{1,2\}$.*
  - Identification : *La résolution de l'équation $t^2y' - ty = 1$ sur J_i se ramène à celle de l'équation $y' = \dfrac{1}{t}y + \dfrac{1}{t^2}$ car t^2 ne s'annule pas. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients continus sur J_i.*
  - Solutions de l'équation homogène : *L'ensemble des solutions de l'équation homogène sur J_i est*
  $$\mathcal{S}_h = \left\{J_i \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \tilde{\lambda}|t| \mid \tilde{\lambda} \in \mathbb{R}\right\} = \{J_i \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda t \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$
  - Solution particulière : *Appliquons la méthode de variation de la constante.*
  Cherchons une solution particulière φ_p de (8) définie sur J_i sous la forme $\varphi_p(t) = \psi(t)t$ où ψ est une fonction dérivable de J_i dans $\mathbb{R}$.
  Alors φ_p est solution de (8) si et seulement si, pour tout $t \in J_i$,
  $$t^3\psi'(t) = 1,$$
  soit encore, si et seulement si, pour tout $t \in J_i$, $\psi'(t) = \dfrac{1}{t^3}$.
  Par exemple, choisissons pour ψ la fonction $\psi : t \longmapsto -\dfrac{1}{2t^2}$.
  La fonction $\varphi_p : J_i \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto -\dfrac{1}{2t}$ est alors une solution particulière de (8).
  - Conclusion : *L'ensemble des solutions de (8) sur J_i est donc*
  $$\mathcal{S} = \left\{J_i \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda t - \frac{1}{2t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$
- Résolution de l'équation sur $\mathbb{R}$: *Soit φ une éventuelle solution de (8) sur $\mathbb{R}$. D'après le point précédent, il existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que*
$$\varphi(t) = \left\{\begin{array}{ll} \lambda_1 t - \dfrac{1}{2t} & si\ t > 0 \\[2ex] \lambda_2 t - \dfrac{1}{2t} & si\ t < 0 \end{array}\right.$$

φ étant continue en 0, on doit avoir $\lim_{t\to 0^+} \varphi(t) = \lim_{t\to 0^+} \varphi(t) = \varphi(0)$.

Or $\lim_{t\to 0^+} \varphi(t) = \lim_{t\to 0^+} \lambda_1 t - \dfrac{1}{2t} = -\infty$. *Cela contredit alors la continuité de φ en 0.*
L'équation (8) n'admet donc pas de solutions sur $\mathbb{R}$.

– Conclusion : *L'ensemble des solutions de (8) sur $\mathbb{R}$ est donc l'ensemble vide :*

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

Sur le champ de vecteurs ci-dessous, on a tracé des courbes intégrales de l'équation $t^2y' - ty = 1$ définies sur $\mathbb{R}_-^*$ en bleu et sur $\mathbb{R}_+^*$ en rouge. Il n'y a pas de raccordement continu possible en 0, et donc pas de courbes intégrales sur $\mathbb{R}$.