# Chapitre 2 Équations différentielles scalaires

Dans tout ce chapitre, $n$ désigne un entier naturel non nul, $\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou celui des nombres complexes $\mathbb{C}$.

## 2.1 Équations différentielles linéaires scalaires

Dans cette partie, $I$ désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

### 2.1.1 Résultats généraux

On s'intéresse à l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre $n$

$$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + b(t), \tag{$E$}$$

où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $b : I \longrightarrow \mathbb{K}$ sont des fonctions continues.

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions maximales de l'équation ($E$) et $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions maximales de l'équation homogène associée

$$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}. \tag{$E_h$}$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire (voir chapitre 1), les solutions des équations ($E$) et ($E_h$) sont globales et définies sur $I$.

Proposition 1
*L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène ($E_h$) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$.*

**Preuve** — L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de ($E_h$) est le noyau de l'application linéaire

$$\begin{array}{rccl} \ell : & \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(I, \mathbb{K}) \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi^{(n)} - a_0(t)\varphi - \ldots - a_{n-1}(t)\varphi^{(n-1)} \end{array}.$$

$\mathcal{S}_h$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$.

□

Proposition 2
*L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation ($E$) est un espace affine dirigé par l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène ($E_h$) :*

$$\mathcal{S} = \varphi_p + \mathcal{S}_h,$$

*où $\varphi_p \in \mathcal{S}$.*

**Preuve** — D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, l'ensemble $\mathcal{S}$ est non vide. Il existe donc un élément $\varphi_p$ de $\mathcal{S}$.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$. Alors $\varphi \in \mathcal{S}$ si et seulement si, pour tout $t \in I$,

$$\varphi^{(n)}(t) = a_0(t)\varphi(t) + \ldots + a_{n-1}(t)\varphi^{(n-1)}(t) + b(t),$$

soit encore, si et seulement si, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} (\varphi - \varphi_p)^{(n)}(t) &= \varphi^{(n)}(t) - \varphi_p^{(n)}(t) = a_0(t)\varphi(t) + \ldots + a_{n-1}(t)\varphi^{(n-1)}(t) + b(t) - \left(a_0(t)\varphi_p(t) + \ldots + a_{n-1}(t)\varphi_p^{(n-1)}(t) + b(t)\right) \\ &= a_0(t)\left(\varphi - \varphi_p\right)(t) + \ldots + a_{n-1}(t)\left(\varphi - \varphi_p\right)^{(n-1)}(t). \end{aligned}$$

Donc $\varphi \in \mathcal{S}$ si et seulement si $\varphi - \varphi_p \in \mathcal{S}_h$.

Donc $\mathcal{S} = \varphi_p + \mathcal{S}_h$. □

On redémontrera ce théorème dans certains cas sans utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, que nous n'avons pas démontré dans le premier chapitre.

En d'autres termes, si l'on connait une solution particulière $\varphi_p$ de ($E$), alors l'ensemble des solutions de ($E$) est $\mathcal{S} = \varphi_p + \mathcal{S}_h$. Ainsi, pour trouver l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de ($E$), on cherche l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène associée ($E_h$) et une solution particulière de ($E$).

MÉTHODE 3 — *Pour résoudre une équation différentielle linéaire scalaire non homogène ($E$), on procédera de la façon suivante :*

1. *On identifie le type de l'équation différentielle ($E$) étudiée.*
2. *On donne l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène associée ($E_h$).*
3. *On cherche une solution particulière $\varphi_p$ de l'équation ($E$)*
4. *On conclut en donnant l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation ($E$) : $\mathcal{S} = \varphi_p + \mathcal{S}_h$.*

Le principe de superposition des solutions énoncé ci-dessous est très utile en pratique car il permet de rechercher une solution particulière en décomposant le second membre en des membres plus simples.

PROPOSITION 4 (Principe de superposition)
*Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ des éléments de $\mathbb{K}$ et $b_1, \ldots, b_N$ des applications continues de $I$ dans $\mathbb{K}$. Supposons que pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, $\varphi_i$ est une solution particulière de l'équation*

$$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + b_i(t).$$

*Alors $\lambda_1\varphi_1 + \ldots \lambda_N\varphi_N$ est une solution particulière de l'équation*

$$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \lambda_1 b_1(t) + \ldots + \lambda_N b_N(t).$$

**Preuve** — Considérons l'application linéaire

$$\begin{array}{rccl} \ell : & \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(I, \mathbb{K}) \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi^{(n)} - a_0(t)\varphi - \ldots - a_{n-1}(t)\varphi^{(n-1)} \end{array}.$$

Par hypothèse, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\ell(\varphi_i) = b_i$.

Par linéarité de $\ell$, on a alors $\ell(\lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_N\varphi_N) = \lambda_1\ell(\varphi_1) + \ldots + \lambda_N\ell(\varphi_N) = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_N b_N$.

Donc $\lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_N\varphi_N$ est une solution particulière de

$$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \lambda_1 b_1(t) + \ldots + \lambda_N b_N(t).$$

□

EXEMPLE 5 — *Pour trouver une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle*

$$y' + y = \cos(x) + (x+1)\mathrm{e}^{-x},$$

*on peut donc chercher une solution particulière $\varphi_1$ de l'équation différentielle $y' + y = \cos(x)$ puis une solution particulière $\varphi_2$ de l'équation différentielle $y' + y = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$, et enfin les additionner. Ainsi, au lieu d'un calcul compliqué, on se ramène à deux calculs plus simples.*

## 2.1.2 Équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre

On s'intéresse aux équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre de la forme

$$y' = a(t)y + b(t), \tag{$E_1$}$$

où $a$ et $b$ sont des applications de $I$ dans $\mathbb{K}$ continues.

### 2.1.2.a. Ensemble des solutions de l'équation homogène

PROPOSITION 6
*Soient $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et $A$ une primitive de $a$ sur $I$.*

1. *L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène $y' = a(t)y$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1 engendré par l'application $I \longrightarrow \mathbb{K}$ ; $t \longmapsto \exp(A(t))$ :*

$$\mathcal{S}_h = \{I \longrightarrow \mathbb{K} \ ; \ t \longmapsto \lambda \exp(A(t)) \mid \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

2. *Soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = a(t)y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

*possède une et une seule solution définie sur $I$, qui est l'application*

$$I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto y_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right).$$

**Preuve** —

1. $\triangleright$ Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Posons $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{A(t)}$. Alors, $\varphi$ est dérivable et pour tout $t \in I$, $\varphi'(t) = \lambda a(t)\mathrm{e}^{A(t)} = a(t)\varphi(t)$.
   Donc $\varphi$ est solution de $y' = a(t)y$.
   $\triangleleft$ Réciproquement, soit $\varphi$ une solution de l'équation $y' = a(t)y$. Posons, pour tout $t \in I$, $\psi(t) = \varphi(t)e^{-A(t)}$.
   Alors, $\varphi$ étant dérivable, $\psi$ l'est aussi et pour tout $t \in I$, $\psi'(t) = e^{-A(t)}\left(\varphi'(t) - a(t)\varphi(t)\right) = e^{-A(t)} \times 0 = 0$.
   Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $t \in I$, $\psi(t) = \lambda$.
   Donc pour tout $t \in I$, $\varphi(t)e^{-A(t)} = \lambda$, soit $\varphi(t) = \lambda\mathrm{e}^{A(t)}$.
   D'où le résultat.
2. D'après le premier point, $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est solution du problème de Cauchy si et seulement si pour tout $t \in I$, $\varphi(t) = \lambda\mathrm{e}^{A(t)}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\varphi(t_0) = y_0$, soit si et seulement si $\lambda = y_0\mathrm{e}^{-A(t_0)}$.
   Il existe donc une unique solution au problème de Cauchy, qui est l'application

$$I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto y_0\mathrm{e}^{A(t)-A(t_0)} = y_0\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s}.$$

□

Remarque 7 — *Dans le cas particulier où $a$ est une constante, les solutions de l'équation homogène $y' = ay$ sont les fonctions $I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto \lambda e^{at}$, où $\lambda \in \mathbb{K}$.*

Exemples 8

- *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$y' = \frac{1}{1+t^2}y., \tag{1}$$

  – Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène scalaire du premier ordre à coefficients continus sur $\mathbb{R}$.*

  –Solutions de l'équation homogène : *L'application $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ l'application*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \arctan(t).$$

  *L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de (1) est donc le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1 engendré par la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longrightarrow \exp(\arctan(t))$ :*

$$\mathcal{S}_h = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda \exp(\arctan(t)) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- *Déterminons sur $\mathbb{R}$ la solution du problème de Cauchy* $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{1+t^2}y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

  *D'après le point précédent, on connaît l'ensemble des solutions de l'équation (1), elles sont de la forme $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda \exp(\arctan(t))$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.*
  *La condition initiale $y(0) = 1$ donne alors $\lambda = 1$.*
  *Donc l'unique solution de ce problème de Cauchy sur $\mathbb{R}$ est l'application*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \exp(\arctan(t)).$$

#### 2.1.2.b. Ensemble des solutions de l'équation avec second membre

PROPOSITION 9
*Soient $a$ et $b$ deux éléments de $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$.*

1. *L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $y' = a(t)y + b(t)$ ($E_1$) est un espace affine de dimension 1 dirigé par l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène :*

$$\mathcal{S} = \{I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto \varphi_p(t) + \lambda \exp(A(t)) \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \varphi_p + \mathcal{S}_h,$$

   *où $\varphi_p$ est une solution particulière de ($E_1$).*

2. *Soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = a(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

   *possède une et une seule solution définie sur $I$, qui est l'application*

$$I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto \int_{t_0}^{t} b(s)\mathrm{e}^{\int_s^t a(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}s + y_0\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s}.$$

**Preuve** — On démontre ainsi le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire dans le cas linéaire scalaire d'ordre 1.

1. D'après le paragraphe précédent, les solutions de l'équation homogène $y' = a(t)y$ sont de la forme $t \longmapsto \lambda\mathrm{e}^{A(t)}$, où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A$ est une primitive de $a$ sur $I$.
   La *méthode de variation de la constante* consiste à chercher une solution de l'équation ($E_1$) sous la forme $\varphi(t) = \psi(t)\mathrm{e}^{A(t)}$, où $\psi$ est une fonction de $I$ dans $\mathbb{K}$. Ce principe de résolution est appelé *méthode de variation de la constante.*
   Soit $t_0 \in I$. Soit $\varphi$ une fonction de $I$ dans $\mathbb{K}$ dérivable. Posons, pour tout $t \in I$, $\psi(t) = \varphi(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$, de sorte que $\varphi(t) = \psi(t)\mathrm{e}^{A(t)}$.
   $\varphi$ étant dérivable, $\psi$ l'est aussi et pour tout $t \in I$, $\varphi'(t) = a(t)\psi(t)\mathrm{e}^{A(t)} + \psi'(t)\mathrm{e}^{A(t)} = a(t)\varphi(t) + \psi'(t)\mathrm{e}^{A(t)}$.
   Donc $\varphi \in \mathcal{S}$ si et seulement si, pour tout $t \in I$, $\psi'(t)\mathrm{e}^{A(t)} = b(t)$, soit, si et seulement si, pour tout $t \in I$, $\psi'(t) = b(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$.
   L'application $t \longmapsto b(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$ étant continue sur $I$, $\varphi \in \mathcal{S}$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $t \in I$, $\psi(t) = \int_{t_0}^t b(s)\mathrm{e}^{-A(s)}\mathrm{d}s + \lambda$, i.e. $\varphi(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \int_{t_0}^t b(s)\mathrm{e}^{-A(s)}\mathrm{d}s + \lambda\mathrm{e}^{A(t)}$.
   Ainsi, $\mathcal{S}$ est l'ensemble des applications de la forme

$$\varphi_\lambda : I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto \underbrace{\mathrm{e}^{A(t)} \int_{t_0}^t b(s)\mathrm{e}^{-A(s)}\mathrm{d}s}_{\varphi_0 \text{ solution particulière de } (E_1)} + \underbrace{\lambda\mathrm{e}^{A(t)}}_{\in \mathcal{S}_h}.$$

   On en déduit donc le premier point.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. En reprenant les notations précédentes, $\varphi_\lambda$ est solution du problème de Cauchy si et seulement si $\varphi_\lambda(t_0) = \lambda\mathrm{e}^{A(t_0)} = y_0$, soit encore, si et seulement si $\lambda = y_0\mathrm{e}^{-A(t_0)}$.
   Il existe donc une unique solution au problème de Cauchy, qui est l'application

$$I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto \int_{t_0}^t b(s)\mathrm{e}^{A(t)-A(s)}\mathrm{d}s + y_0\mathrm{e}^{A(t)-A(t_0)} = \int_{t_0}^t b(s)\mathrm{e}^{\int_s^t a(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}s + y_0\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s}.$$

□

En pratique, l'expression de la solution du problème de Cauchy donnée dans la proposition précédente ne sera pas utilisée telle quelle mais la démarche pour l'obtenir pourra être employée. On parle de *méthode de variation de la constante.*

#### 2.1.2.c. Détermination pratique d'une solution particulière

Nous savons résoudre l'équation différentielle homogène associée à ($E_1$), il reste maintenant à expliquer comment trouver une solution particulière. On rappelle que l'on peut utiliser le principe de superposition des solutions pour simplifier la recherche d'une solution particulière.

Parfois, on connaît une solution particulière, parce qu'elle apparaît de façon évidente ou qu'elle est suggérée dans un énoncé. Dans ce cas, il ne reste plus qu'à appliquer la proposition 9.

Exemple 10 — *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$y' + t^2 y = t^2. \tag{2}$$

- Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients et second membre continus sur $\mathbb{R}$.*
- Solutions de l'équation homogène : *L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (2) est*

$$\mathcal{S}_h = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda \exp\left(-\frac{t^3}{3}\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- Solution particulière de l'équation : *La fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto 1$ est une solution particulière évidente de (2).*
- Conclusion : *L'ensemble des solutions de l'équation (2) est donc*

$$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto 1 + \lambda \exp\left(-\frac{t^3}{3}\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Si aucune solution évidente n'apparaît, on peut utiliser la méthode de variation de la constante, qui reprend la démonstration du point 1. de la proposition 9.

Méthode 11 (Méthode de variation des constantes) — *Cette méthode permet d'obtenir l'expression d'une solution particulière de l'équation ($E_1$).*

1. *On sait que les solutions de l'équation homogène associée sont de la forme $t \longmapsto \lambda e^{A(t)}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A$ désigne une primitive de $a$. On cherche alors une solution particulière sous la forme $\varphi_p(t) = \psi(t)e^{A(t)}$ où $\psi$ est une fonction dérivable de $I$ dans $\mathbb{K}$.*
2. *En remplaçant dans l'équation ($E_1$) et après simplification, on obtient que $\varphi_p$ est solution de ($E_1$) si et seulement si $\psi'(t)e^{A(t)} = b(t)$, soit finalement $\psi'(t) = b(t)e^{-A(t)}$.*
3. *On obtient alors $\psi$ par primitivation, et donc l'expression de $\varphi_p$.*

Remarque 12 — *Notons que la méthode de variation de la constante donne en fait plus qu'une simple solution particulière de ($E_1$), elle donne exactement toutes les solutions.*

Exemple 13 — *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$y' + \frac{t}{1+t^2} y = \frac{1}{1+t^2} \tag{3}$$

- Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients et second membre continus sur $\mathbb{R}$.*
- Solutions de l'équation homogène : *Pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$\int_0^t \frac{-s}{1+s^2} \mathrm{d}s = -\frac{1}{2} \ln\left(1+t^2\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right).$$

  *L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (3) est donc*

$$\mathcal{S}_h = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \frac{\lambda}{\sqrt{1+t^2}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- Solution particulière : *Appliquons la méthode de variation de la constante.*
  *Cherchons une solutions particulière $\varphi_p$ de (3) sous la forme $\varphi_p(t) = \dfrac{\psi(t)}{\sqrt{1+t^2}}$, où $\psi$ est une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*
  *Alors $\varphi_p$ est solution de l'équation si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$\frac{\psi'(t)}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{1+t^2},$$

*soit encore, si et seulement si, pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $\psi'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.
*Par exemple, choisissons pour* $\psi$ *la fonction* $\psi : t \longmapsto \operatorname{argsh}(t)$.
*La fonction* $\varphi_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \dfrac{\operatorname{argsh}(t)}{\sqrt{1+t^2}}$ *est alors une solution particulière de (3).*

– Conclusion : *L'ensemble des solutions de (3) est donc*

$$\mathcal{S} = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \frac{\operatorname{argsh}(t) + \lambda}{\sqrt{1+t^2}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$