EQUA. DIFF

Chap 2 - Equations différentielles scalaires

Cours 4 (1)

2.1 - Equations différentielles linéaires scalaires

2.1.1 - Ordre 1

2.1.1.c - Détermination pratique de φ_p.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b(t) \quad (E)$$

Polynôme caractéristique associé à (E) : $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$

$$\underbrace{y'}_{y^{(0)}} + a_0 y = P(t) e^{\alpha t} \quad : \quad X + \underbrace{a_0}_{a_0 X^0 = a_0} \qquad (n = 1)$$

- $y' + a_0 y = b$ où b constant / $y' + a_0 y = P(t)$ avec $\alpha = 0$

  $= b e^{0t}$ et $\begin{cases} P = b \\ \alpha = 0 \end{cases}$ polynôme de degré 0

- $y' + a_0 y = e^{\alpha t}$

  $= P(t) e^{\alpha t}$ et $P(t) = 1$ polynôme de degré 0.

Penser à ces cas particuliers pour la prop 14.

- $y' + a_0 y = P(t) e^{\alpha t}$ avec $a_0, \alpha \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et P à coefficients dans $\mathbb{K}$.

- $y' + a_0 y = \begin{cases} P(t) e^{\beta t} \cos(\omega t) \\ P(t) e^{\beta t} \sin(\omega t) \end{cases}$ avec $a_0, \beta, \omega \in \mathbb{R}$ et P à coefficients dans $\mathbb{R}$.

$\cos(\omega t) = \mathrm{Re}(e^{i\omega t})$, $\sin(\omega t) = \mathrm{Im}(e^{i\omega t})$.

$$y' + \underbrace{a_0}_{\in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}} y = P(t) e^{\beta t} e^{i\omega t} = \underbrace{P(t)}_{\in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]} e^{\overbrace{(\beta + i\omega)}^{\alpha \in \mathbb{C}} t} \longrightarrow \text{appliquer la prop 14.}$$

On résout l'équation sur $\mathbb{C}$, on obtient une solution particulière $\varphi_{p,\mathbb{C}}$

$\varphi_{p,\mathbb{C}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ (solution complexe).

Alors $\mathrm{Re}(\varphi_{p,\mathbb{C}}) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une solution réelle de

$$y' + a_0 y = P(t) e^{\beta t} \cos(\omega t).$$

<u>Dém</u>. On a $\varphi_{p,\mathbb{C}}'(t) + \underbrace{a_0}_{\in \mathbb{R}} \varphi_{p,\mathbb{C}}(t) = \underbrace{P(t)}_{\in \mathbb{R}[X]} \underbrace{e^{\beta t}}_{\in \mathbb{R}} e^{i\omega t}$

Alors $\mathrm{Re}(\varphi_{p,\mathbb{C}})'(t) + a_0 \mathrm{Re}(\varphi_{p,\mathbb{C}})(t) = P(t) e^{\beta t} \cos(\omega t)$.

. On peut résoudre de cette manière les équations

$$y' + a_0 y = \cos(\omega t)$$

$= P(t) e^{\beta t} \cos(\omega t)$ avec $P(t) = 1$ et $\beta = 0$

Résoudre $y' + a_0 y = e^{i\omega t}$ puis prendre la partie réelle.

$\hookrightarrow$ prop 14.

Ex 15 $\quad \underbrace{y' \underbrace{-2}y}_{} = \underbrace{t}_{}e^{\overset{1}{}t}$

$y' + a_0 y = P(t)e^{\alpha t}$

avec $a_0 = -2$, $P(t) = t$ et $\alpha = 1$

P est de degré 1.

$X-2$: α n'est pas racine de $X-2$ $\quad (1-2 = -1 \neq 0)$.

D'après la prop 14, on cherche φ_p sous la forme $\varphi_p(t) = Q(t)e^{t}$

et $d^\circ Q = d^\circ P = 1$, donc Q est de la forme $Q = aX+b$,

avec $a, b \in \mathbb{R}$. Donc $\varphi_p(t) = (at+b)e^{t}$.

valeurs à déterminer.

φ_p est solution de (4) ssi $\varphi_p'(t) - 2\varphi_p(t) = te^{t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

On a $\varphi_p'(t) = ae^{t} + (at+b)e^{t} = e^{t}(a+b+at)$

Donc φ_p est solution de (4)

ssi $\cancel{e^{t}}(\underline{a}+\underline{b}+at) - 2(at+\underline{b})\cancel{e^{t}} = t\cancel{e^{t}}$

ssi $\underbrace{a+b-2b}_{a_0} \underbrace{-a}_{a_1}t = t \quad = \underbrace{0}_{b_0} + \underbrace{1}_{b_1}t$

$a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n = b_0 + b_1X + \dots + b_nX^n$
$\Leftrightarrow a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \dots\ a_n = b_n$.

ssi $a - b = 0$ et $-a = 1$

ssi $a = b$ et $a = -1$

ssi $a = b = -1$ ssi $\varphi_p(t) = (-t-1)e^{t}$.

Ex 17 $\quad y' + y = \underbrace{2}_{2}\underbrace{\cos(t)}_{b_1(t)} + \underbrace{\sin t}_{b_2(t)}$

On cherche φ_{p_1} solution part. de $y'+y = \cos(t) = \mathrm{Re}(e^{it})$

φ_{p_2} " " " $y'+y = \sin(t) = \mathrm{Im}(e^{it})$

On commence par "résoudre" $y'+y = e^{it}$

cherche une solution particulière.

Appliquons la proposition 14. $\quad y'+y = \underbrace{1}_{P(t)} \times e^{it}$ $\quad$ et $\alpha = i$.

de degré 0

On cherche φ_p sous la forme $\varphi_p(t) = Q(t)e^{it} = ae^{it}$ où $a \in \mathbb{C}$.

i n'est pas racine de $X+1$: $i+1 \neq 0$ et $d^\circ Q = d^\circ P = 0$

φ_p est solution de $y'+y=e^{it}$ ssi $\forall t \in \mathbb{R}$ $\varphi_p'(t)+\varphi_p(t)=e^{it}$.

Or $\varphi_p'(t) = aie^{it}$.

Donc φ_p est solution ssi $ai\cancel{e^{it}} + a\cancel{e^{it}} = 1\cancel{e^{it}}$

ssi $a(1+i) = 1$

ssi $a = \dfrac{1}{1+i}$

Donc $\varphi_p(t) = \underbrace{\dfrac{1}{1+i}}_{\tilde{a}+i\tilde{b}} e^{it} = \dfrac{1-i}{2} e^{it} = \left(\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\right)(\cos(t)+i\sin(t))$.

Donc $\mathrm{Re}(\varphi_p(t)) = \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t)$

Donc $\varphi_{p,1} : t \mapsto \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t)$ est une solution part. de $y'+y=\cos(t)$.

Et $\mathrm{Im}(\varphi_p(t)) = -\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t)$.

Donc $\varphi_{p,2} : t \mapsto -\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t)$ est une solution part de $y'+y=\sin(t)$.

Par le principe de superposition des solutions, $2\varphi_{p_1} + \varphi_{p_2}$ est une solution particulière de (S).

$2\varphi_{p_1}(t) + \varphi_{p_2}(t) = \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{3}{2}\sin(t)$.

2.1. Equations différentielles linéaires scalaires

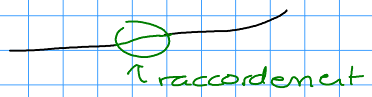
2.1.2. Ordre 1

2.1.2.d. Raccordements de solutions

raccorder : relier

recoller

recollement



1 $y' = a(t)y + b(t)$: on a obtenu des résultats sur l'ens. des solutions définies sur I

$a(t)y' + b(t) = c(t)$

↳ on résout sur J_i : $y' = -\frac{b(t)}{a(t)} y + \frac{c(t)}{a(t)}$ → on applique les résultats sur l'équation résolue

Sur $\mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \lambda e^{\ln(t)} = \lambda t$ $\quad S_h = \{\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R};\ t \mapsto \lambda t,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$

Sur $\mathbb{R}_-^*$, $t \mapsto \lambda e^{\ln(-t)} = -\lambda t$ $\quad S_h = \{\mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R},\ t \mapsto -\lambda t,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$

$= \{\mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R};\ t \mapsto \beta t,\ \beta \in \mathbb{R}\}$