Feuille de TD n° 1

Équations différentielles

10 septembre 2020

Exercice 1. Pour chacune des équations différentielles suivantes,

- préciser son ordre et indiquer s'il s'agit d'une équation différentielle :
  - — scalaire ou vectorielle,
  - — linéaire (homogène, à coefficients constants...) ou non linéaire,
  - — séparable,
  - — autonome...
- puis prouver l'existence et l'unicité avec une condition initiale en $t = 0$ que l'on précisera, de solutions maximales.

1. $y'' + 2t^2y' + y = 0$,
2. $y'' + 2yy' = 0$,
3. $Y' = \begin{pmatrix} 4 & t \\ \cos(t) & 1 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$,
4. $y' = \cos(y)$,
5. $\left\{ \begin{array}{l} x' = x + 3y - 5t \\ y' = 5x - y - 4 \end{array} \right.$,
6. $y' = \dfrac{1}{t+1} y^2$,
7. $y^{(5)} + 2y^{(3)} + y' = t^2 \sin(t)$,
8. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y^2 \\ txy \end{pmatrix}$,
9. $y' = \dfrac{1}{1 + t^2 + y^{12}}$,
10. $y'' + (y')^2 \sin(ty) = 0$.

Exercice 2. Mettre les équations différentielles suivantes sous la forme d'une équation différentielle vectorielle du premier ordre $Y' = f(t, Y)$.

1. $2y^{(3)} + 2ty'' - y' + 8y = e^t$,
2. $y'' + (y')^2 = \cos(t)$,
3. $\left\{ \begin{array}{l} y_1'' = y_1 + ty_2', \\ y_2'' = y_1y_2 - y_1'y_2'. \end{array} \right.$

Exercice 3. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soient $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(E))$ et $b \in \mathcal{C}(I, E)$.

1. Montrer qu'une solution de $y' = a(t) \cdot y$ est soit identiquement nulle, soit ne s'annule jamais.
2. On suppose de plus que $I = \mathbb{R}$ et que a et b sont des fonctions impaires. Montrer que toute solution de $y' = a(t) \cdot y + b(t)$ est une fonction paire.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $(t, y) \longmapsto 3(y^2)^{\frac{1}{3}}$.

On s'intéresse au problème de Cauchy $(\mathcal{C})$ suivant :

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad (\mathcal{C})$$

On considère l'application $\psi : \ [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$; $t \longmapsto t^3$.

1. Vérifier que ψ est une solution du problème de Cauchy $(\mathcal{C})$. S'agit-il d'une solution globale ?
2. On définit les fonctions suivantes :

$$\varphi_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^3 \end{array}$$

et, pour tout $K \in \mathbb{R}_-^*$,

$$\varphi_K : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} t^3 \text{ si } 0 \leq t, \\ 0 \text{ si } K < t < 0, \\ (t-K)^3 \text{ si } t \leq K. \end{cases} \end{array} .$$

   (a) Démontrer que φ_0 est un prolongement de ψ, qui est solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy $(\mathcal{C})$. Les applications φ_0 et ψ sont-elles des solutions maximales, globales ?

(b) Démontrer que pour tout $K \in \mathbb{R}_-^*$, φ_K est dérivable aux points K et 0. On précisera la valeur des dérivées en ces points.

(c) Démontrer que pour tout $K \in \mathbb{R}_-^*$, φ_K est solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy $(\mathcal{C})$. S'agit-il de solutions maximales, globales ?

(d) Justifier que ψ admet une infinité de prolongements sur $\mathbb{R}$ qui sont solutions du problème de Cauchy $(\mathcal{C})$.

3. On a donc montré que le problème de Cauchy $(\mathcal{C})$ admet une infinité de solutions définies sur $\mathbb{R}$. Cela contredit-il le théorème de Cauchy-Lipschitz ?