Feuille de TD n° 2

Équations différentielles

21 septembre 2020

Exercice 1.

1. Résoudre sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle

$$y' = \tan(t)y + \frac{t}{\cos(t)}.$$

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y' + y = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^x}.$$

3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les problèmes de Cauchy suivants :

(a) $\left\{ \begin{array}{l} y' + (3x^2 + 1)y = x^2\mathrm{e}^{-x} \\ y(0) = 1 \end{array} \right.$

(b) $\left\{ \begin{array}{l} (x^2 + 1)^2y' + 2x(x^2 + 1)y = 1 \\ y(0) = 1 \end{array} \right.$

Exercice 2. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t + 1.$$

Exercice 3. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) + f(x) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 4. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable telle que l'application $f' + f$ admet 0 comme limite en $+\infty$. Montrer que f admet 0 comme limite en $+\infty$.

Indications

Exercice 1

On peut appliquer la méthode 3 du cours pour donner l'ensemble des solutions de chaque équation différentielle.

1. Pour déterminer $\mathcal{S}_h$, calculer une primitive de tan (on pourra effectuer un changement de variables). Penser à simplifier l'expression $\exp(A(t))$ où A est une primitive de tan.

   Pour déterminer une solution particulière, appliquer la méthode de variation de la constante.
2. $\mathcal{S}_h$: Facile.

   Pour déterminer une solution particulière, appliquer la méthode de variation de la constante. On pourra effectuer un changement de variables pour calculer une primitive de ψ et en déduire φ_p.
3. (a) Commencer par résoudre l'équation différentielle, puis chercher la solution qui vérifie la condition initiale.

   $\mathcal{S}_h$: Facile.

   Pour déterminer une solution particulière, appliquer la méthode de variation de la constante. On pourra effectuer un changement de variables pour calculer une primitive de ψ et en déduire φ_p.

   (b) Commencer par résoudre l'équation différentielle, puis chercher la solution qui vérifie la condition initiale.

   Ramener l'équation différentielle à une équation différentielle sous forme résolue $y' = a(t)y + b(t)$ puis appliquer la méthode 3. Les primitives sont assez faciles à obtenir.

Exercice 2

Dériver la relation (à justifier) pour retrouver une équation différentielle vérifiée par f. Résoudre alors cette équation puis déterminer, à l'aide de la relation, une condition initiale vérifiée par f. On en déduit la valeur de la constante apparaissant dans l'expression de f.

Exercice 3

Poser $c = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$. Donner alors l'équation différentielle vérifiée par f. Résoudre cette équation pour en déduire une expression de f. Il reste à trouver la valeur de la constante qui apparaît dans cette expression (utiliser à nouveau la relation).

Exercice 4 (Plus difficile)

Poser $g = f + f'$. Donner alors l'équation différentielle vérifiée par f. Résoudre cette équation pour en déduire une expression de f. Utiliser la définition de la limite en ε pour montrer que cette expression tend vers 0 en $+\infty$: utiliser l'hypothèse sur g et couper l'intégrale en 2.