Corrigé du TD n° 2

Équations différentielles

21 septembre 2020

Exercice 1.

1. Résoudre sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle
$$y' = \tan(t)y + \frac{t}{\cos(t)}.$$
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
$$y' + y = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}.$$
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les problèmes de Cauchy suivants :
   (a) $\begin{cases} y' + (3x^2+1)y = x^2\mathrm{e}^{-x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$
   (b) $\begin{cases} (x^2+1)^2y' + 2x(x^2+1)y = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

---

1. • **Identification :** Il s'agit d'une équation différentielle scalaire linéaire du premier ordre à coefficients et second membre continus sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

   • **Solutions de l'équation homogène :** Déterminons une primitive de la fonction tan. Pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,
$$\int_0^t \tan(x)\mathrm{d}x = \int_0^t \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\mathrm{d}x = -\ln(|\cos(t)|) = \ln\left(\frac{1}{|\cos(t)|}\right).$$
   De plus, pour tout $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\cos(t) \geq 0$ donc $|\cos(t)| = \cos(t)$. Ainsi, pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,
$$\exp(\int_0^t \tan(x)\mathrm{d}s) = \frac{1}{\cos(t)}.$$
   On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est
$$\mathcal{S}_h = \left\{\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \frac{\lambda}{\cos(t)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

   • **Solution particulière :** On cherche une solution particulière φ_p par la méthode de variation de la constante. On cherche donc φ_p sous la forme $\varphi_p(t) = \frac{\psi(t)}{\cos(t)}$, où ψ est une fonction dérivable de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$.
   Alors, pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\varphi_p'(t) = \frac{\psi'(t)\cos(t) + \psi(t)\sin(t)}{\cos^2(t)}$.
   Donc φ_p est solution de $y' - \tan(t)y = \frac{t}{\cos(t)}$ si et seulement si, pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,
$$\frac{\psi'(t)\cos(t) + \psi(t)\sin(t)}{\cos^2(t)} - \tan(t)\frac{\psi(t)}{\cos(t)} = \frac{t}{\cos(t)}.$$

Donc φ_p est solution de l'équation si et seulement si, pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\psi'(t) = t$.

Choisissons par exemple, pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\psi(t) = \frac{t^2}{2}$.

Ainsi, l'application φ_p, définie pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par

$$\varphi_p(t) = \frac{1}{2}\frac{t^2}{\cos(t)},$$

est une solution particulière de l'équation.

• **Conclusion :** Donc l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est

$$\mathcal{S} = \left\{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ t \longmapsto \frac{\lambda}{\cos(t)} + \frac{1}{2}\frac{t^2}{\cos(t)} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$

• **Identification :** Il s'agit d'une équation différentielle scalaire linéaire du premier ordre à coefficients et second membre continus sur $\mathbb{R}$.

• **Solutions de l'équation homogène :** L'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\mathcal{S}_h = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ x \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{-x} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

• **Solution particulière**

On cherche une solution particulière φ_p par la méthode de variation de la constante. On cherche donc φ_p sous la forme $\varphi_p(x) = \psi(x)e^{-x}$, où ψ est une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Alors φ est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi_p'(x) = \psi'(x)e^{-x} - \psi(x)e^{-x}$.

Donc φ_p est solution de $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\psi'(x)e^{-x} - \psi(x)e^{-x} + \psi(x)e^{-x} = \frac{1}{1+e^x},$$

soit encore, si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\psi'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}.$$

Choisissons par exemple, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^s}{1+\mathrm{e}^s}\mathrm{d}s$.

En effectuant le changement de variables "$u = e^s$", on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \int_0^{\mathrm{e}^x} \frac{1}{1+u}\mathrm{d}u \\ &= [\ln(|1+u|)]_1^{\mathrm{e}^x} \\ &= \ln(|1+\mathrm{e}^x|) - \ln(2) \\ &= \ln(1+\mathrm{e}^x) - \ln(2) \quad \text{ car } 1+e^x \geq 0.\end{aligned}$$

Ainsi, l'application φ_p, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\varphi_p(x) = e^{-x}\ln(1+e^x) - e^{-x}\ln(2),$$

est une solution particulière de l'équation.

• **Conclusion :** L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + y = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ est donc

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \left\{ x \mapsto \tilde{\lambda}\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x) - \mathrm{e}^{-x}\ln(2) \mid \tilde{\lambda} \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x \mapsto (\tilde{\lambda} - \ln(2))\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x) \mid \tilde{\lambda} \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}\end{aligned}$$

Remarque : On aurait pu prendre directement $\psi(x) = \ln(1+\mathrm{e}^x)$ qui vérifie bien $\psi'(x) = \dfrac{e^x}{1+\mathrm{e}^x}$, sans passer par un calcul d'intégrale. On retrouve évidemment le même ensemble de solutions de l'équation.

3. (a) $\left\{\begin{array}{l} y' + (3x^2+1)y = x^2 e^{-x} \\ y(0) = 1 \end{array}\right.$

On commence par chercher l'ensemble des solutions de l'équation, ensuite on cherchera parmi ces solutions, celle qui vaut 1 en 0.

• Détermination de l'ensemble des solutions de l'équation

− **Identification :** L'équation $y' + (3x^2+1)y = x^2 e^{-x}$ est une équation différentielle scalaire linéaire du premier ordre à coefficients et second membre continus sur $\mathbb{R}$.

− **Solutions de l'équation homogène**
Une primitive de $x \longmapsto -(3x^2+1)$ est par exemple $x \longmapsto -x^3 - x$.
L'ensemble des solutions de l'équation homogène est donc

$$\mathcal{S}_h = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; x \longmapsto \lambda e^{-x^3 - x} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

− **Solution particulière :** On cherche une solution particulière φ_p à l'aide de la méthode de variation de la constante. On cherche donc φ_p sous la forme $\varphi_p(x) = \psi(x) e^{-x^3-x}$, où ψ est une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Alors φ_p est solution de l'équation si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\psi'(x) e^{-x^3-x} = x^2 e^{-x},$$

soit encore si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\psi'(x) = x^2 e^{x^3}.$$

Choisissons par exemple, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \displaystyle\int_0^x s^2 e^{s^3} \mathrm{d}x$.
Par le changement de variables "$u = s^3$", on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\psi(x) = \frac{1}{3} e^{x^3}.$$

Alors l'application φ_p, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\varphi_p(x) = \frac{1}{3} e^{-x},$$

est une solution particulière de l'équation.

− **Conclusion :** L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; x \longmapsto \lambda e^{-x^3-x} + \frac{1}{3} e^{-x} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

• Détermination de la solution du problème de Cauchy.

Une solution du problème de Cauchy est donc de la forme $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; x \longmapsto \lambda e^{-x^3-x} + \dfrac{1}{3} e^{-x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et vérifie de plus $\varphi(0) = 1$.
Donc $\varphi(0) = 1$ si et seulement si $\frac{1}{3} + \lambda = 1$, soit $\lambda = \frac{2}{3}$.
Donc l'unique solution du problème de Cauchy est l'application

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; x \longmapsto \frac{1}{3} e^{-x} + \frac{2}{3} e^{-x^3-x}.$$

(b) $\left\{\begin{array}{l} (x^2+1)^2 y' + 2x(x^2+1)y = 1 \\ y(0) = 1 \end{array}\right.$

On commence par chercher l'ensemble des solutions de l'équation $(x^2+1)^2 y' + 2x(x^2+1)y = 1$, ensuite on cherchera parmi ces solutions, celle qui vaut 1 en 0.

• Détermination de l'ensemble des solutions de l'équation
Comme $x \longmapsto (x^2+1)^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de l'équation $(x^2+1)^2 y' + 2x(x^2+1)y = 1$ est égal à l'ensemble des solutions de l'équation $y' = -\dfrac{2x}{x^2+1} y + \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$. On se ramène ainsi aux équations de la forme vue dans le cours.

− **Identification :** L'équation $y' = -\dfrac{2x}{x^2+1} y + \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$ est une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients et second membre continus sur $\mathbb{R}$.

– **Solutions de l'équation homogène :**
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^x \left(-\frac{2s}{s^2+1}\right) \mathrm{d}s = \left[-\ln\left(|s^2+1|\right)\right]_0^x$$

$$= -\ln\left(|x^2+1|\right) = \ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right) \text{ par positivité de } x^2+1.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp\left(\int_0^t \left(-\frac{2s}{s^2+1}\right) \mathrm{d}s\right) = \frac{1}{x^2+1}$.
Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \frac{\lambda}{x^2+1} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

– **Solution particulière :** On cherche une solution particulière φ_p par la méthode de variation de la constante.
On cherche donc φ_p sous la forme $\varphi_p(x) = \frac{\psi(x)}{x^2+1}$, où ψ est une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Alors φ_p est solution de l'équation si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\psi'(x)}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)^2},$$

soit encore, si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\psi'(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

Choisissons par exemple $\psi = \arctan$.
Alors, l'application φ_p définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \frac{\arctan(x)}{x^2+1}$$

est une solution particulière de l'équation.
– **Conclusion :** L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \frac{\arctan(x)}{x^2+1} + \frac{\lambda}{x^2+1} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

• Détermination de la solution du problème de Cauchy.
Une solution du problème de Cauchy est donc de la forme $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \frac{\arctan(x)}{x^2+1} + \frac{\lambda}{x^2+1}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et vérifie de plus $\varphi(0) = 1$.
Donc $\varphi(0) = 1$ si et seulement si $\lambda = 1$.
Donc l'unique solution du problème de Cauchy est l'application

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \frac{\arctan(x)+1}{x^2+1}.$$

Exercice 2. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t + 1.$$

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t + 1$.

Par continuité de f, la fonction $x \longmapsto xf(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \longmapsto \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \longmapsto xf(x)$. De la relation vérifiée par f, on en déduit donc que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = xf(x)$.

Donc f est solution de l'équation différentielle $y' = xy$.

Or l'ensemble des solutions de $y' = xy$ est

$$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \lambda \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}.$$

La relation vérifiée par f donne également $f(0) = 1$. Comme $f(0) = \lambda$, on en déduit donc que $\lambda = 1$.

Finalement, f est l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$.

Réciproquement, l'application $x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$ est continue et vérifie la relation de l'énoncé : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^x t\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t + 1 = \left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2}\right]_0^x + 1 = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} - 1 + 1 = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} = f(x).$$

Exercice 3. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) + f(x) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable vérifiant $f'(x) + f(x) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$. Posons $c = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

Alors f est solution de l'équation différentielle $y' + y = c$.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est $\mathcal{S}_h = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{-x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $x \longmapsto c$ est une solution évidente de l'équation $y' + y = c$. Donc l'ensemble des solutions de $y' + y = c$ est l'ensemble des fonctions de la forme $x \longrightarrow \lambda \mathrm{e}^{-x} + c$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Comme f est solution, il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-x} + c$. En intégrant entre 0 et 1, on obtient

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \lambda(-e^{-1} + 1) + c.$$

Or $c = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$. On a donc $\lambda(1 - e^{-1}) = 0$, et donc $\lambda = 0$. Ainsi $f = c$ et f est une fonction constante.

Réciproquement, les fonctions constantes sont bien dérivables et vérifient la relation de l'énoncé.

Exercice 4. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable telle que l'application $f' + f$ admet 0 comme limite en $+\infty$. Montrer que f admet 0 comme limite en $+\infty$.

Posons $g = f' + f$. Alors f est solution de l'équation différentielle $y' + y = g$.

Déterminons par la méthode de variation de la constante l'ensemble des solutions de cette équation.

- L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est $\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{-x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

- Soit φ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable. Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \varphi(x)\mathrm{e}^{x}$ de sorte que $\varphi(x) = \psi(x)\mathrm{e}^{-x}$. Comme φ est dérivable, ψ l'est aussi.

φ est solution de l'équation si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi'(x)e^{-x} = g(x)$, soit encore si et seulement si $\psi'(x) = g(x)\mathrm{e}^{x}$.

Ainsi, φ est solution de l'équation si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\psi(x) = \int_0^x g(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t + \lambda,$$

soit

$$\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_0^x g(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t + \lambda \mathrm{e}^{-x}.$$

En particulier, f étant solution, il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_0^x g(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t + \lambda_0 \mathrm{e}^{-x}.$$

Montrons que cette quantité tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Par hypothèse, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \geq x_0$, $|g(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Pour tout $x \in [x_0, +\infty[$, on a

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_0^{x_0} g(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-x}\int_{x_0}^x g(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t + \lambda_0\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\left(\int_0^{x_0} g(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t + \lambda_0\right) + \mathrm{e}^{-x}\int_{x_0}^x g(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t.$$

D'une part, la quantité $\int_0^{x_0} g(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t + \lambda_0$ étant constante, on a

$$\mathrm{e}^{-x}\left(\int_0^{x_0} g(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t + \lambda_0\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Il existe donc $x_1 \in [x_0, +\infty[$ tel que pour tout $x \geq x_1$,

$$\left| \mathrm{e}^{-x} \left(\int_0^{x_0} g(t)\mathrm{e}^t \mathrm{d}t + \lambda_0 \right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, pour tout $x \in [x_1, +\infty[$, on a $x \geq x_0$ et donc

$$\begin{aligned} \left| \mathrm{e}^{-x} \int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{e}^t \mathrm{d}t \right| &\leq \mathrm{e}^{-x} \int_{x_0}^{x} |g(t)|\mathrm{e}^t \mathrm{d}t \\ &\leq \mathrm{e}^{-x} \int_{x_0}^{x} \frac{\varepsilon}{2}\mathrm{e}^t \mathrm{d}t = \frac{\varepsilon}{2}\mathrm{e}^{-x} \left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x_0} \right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{x} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq x_1$, on a

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \left| \mathrm{e}^{-x} \left(\int_0^{x_0} g(t)\mathrm{e}^t \mathrm{d}t + \lambda_0 \right) \right| + \left| \mathrm{e}^{-x} \int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{e}^t \mathrm{d}t \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

D'où le résultat.