Feuille de TD n° 3

Équations différentielles

28 septembre 2020

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 3y = \mathrm{e}^{-5x}$,
2. $y' + y = x\mathrm{e}^{-x}$,
3. $y' + 2y = x^2\mathrm{e}^{-2x} + 2\mathrm{e}^{3x} + 1 + x$,
4. $y' - y = \mathrm{sh}(x) + 1$,
5. $y' - y = \cos(x) + \mathrm{e}^x \sin(2x)$ et $y(0) = 0$.

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $t^2y' - y = 0$,
2. $ty' - y = t$,
3. $ty' - 2y = t^4$,
4. $t(1+t^2)y' - (t^2-1)y = -2t$.

Exercice 3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} (1-t)y' - y = t, \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

1. Que dit le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire ?
2. Déterminer, selon les valeurs de α, les éventuelles solutions de ce problème de Cauchy définies sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Déterminer les fonctions $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que, pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$\int_0^x (x - 3t)f(t)\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}.$$

Indications au dos

Indications

Exercice 1

1. Pour une solution particulière, on peut appliquer la proposition 14 du cours.
2. Idem
3. Pour une solution particulière, utiliser le principe de superposition des solutions pour appliquer la proposition 14.
4. Idem
   Rappel : $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}$.
5. Pour une solution particulière, utiliser le principe de superposition des solutions. Adapter la proposition 14. On commencera par rechercher des solutions particulières de $y' - y = \mathrm{e}^{ix}$ et $y' - y = \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{2ix}$.

Exercice 2

Il s'agit de problèmes de raccordements de solutions. Utiliser la méthode du cours.

1. Trouver l'ensemble des solutions de l'équation homogène, puis raccorder par continuité et étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ et si c'est bien solution.
2. Sur les intervalles de non annulation de t, on trouve
   $S = \{J_i \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda t + t\ln(|t|) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   Raccorder par continuité et étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ et si c'est bien solution.
3. Sur les intervalles de non annulation de t on trouve
   $S = \left\{J_i \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda t^2 + \dfrac{1}{2}t^4 \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.
   Raccorder par continuité et étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ et si c'est bien solution.
4. On peut utiliser une décomposition en éléments simples pour trouver une primitive de $t \longmapsto \dfrac{t^2 - 1}{t(1+t^2)}$.
   Sur les intervalles de non annulation de $t(1+t^2)$, on trouve
   $S = \left\{J_i \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda \dfrac{t^2+1}{t} + \dfrac{1}{t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.
   Raccorder par continuité et étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ et si c'est bien solution.

Exercice 3

1. Sur quel intervalle peut-on appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz ? Quel résultat sur cet intervalle ?
2. Commencer par exemple par résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(1-t)y' - y = t$.
   Sur les intervalles de non annulation de $1 - t$, on trouve
   $\mathcal{S} = \left\{J_i \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \dfrac{\lambda}{1-t} + \dfrac{t^2}{2(1-t)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.
   Raccorder par continuité et étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ et si c'est bien solution.
   En déduire les solutions qui valent α en 0.

Exercice 4

Dériver la relation (après justification !). En déduire que f est dérivable et dériver à nouveau la relation. On trouve que f vérifie sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $2xy' + y = -1$. Résoudre cette équation et en déduire l'expression de f. Discuter de la valeur de la constante apparaissant dans l'expression. Une seule valeur convient...

Faire une étude réciproque.