Corrigé du TD n° 3

Équations différentielles

29 septembre 2020

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 3y = \mathrm{e}^{-5x}$,
2. $y' + y = x\mathrm{e}^{-x}$,
3. $y' + 2y = x^2\mathrm{e}^{-2x} + 2\mathrm{e}^{3x} + 1 + x$,
4. $y' - y = \mathrm{sh}(x) + 1$,
5. $y' - y = \cos(x) + \mathrm{e}^x \sin(2x)$ et $y(0) = 0$.

---

1. $y' + 3y = e^{-5x}$

• **Identification** Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre de la forme polynôme-exponentielle. On peut donc appliquer les théorèmes du cours avec $a_0 = 3$, $P = 1$ et $\alpha = -5$.

• **Solutions de l'équation homogène**
L'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\mathcal{S}_h = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{-3x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

• **Solution particulière**
On cherche une solution particulière sous la forme $\varphi_p(x) = ce^{-5x}$ où $c \in \mathbb{R}$ (ici, Q un polynôme de même degré que $P(X) = 1$, donc de degré 0 et -5 n'est pas racine du polynôme $X + 3$).
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi_p'(x) = -5ce^{-5x}$.
Alors φ_p est solution de l'équation différentielle $y' + 3y = e^{-5x}$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_p'(x) + 3\varphi_p(x) = e^{-5x},$$

soit encore, si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(-5c + 3c)e^{-5x} = e^{-5x},$$

soit $-2c = 1$ (en simplifiant par e^{-5x}) et donc $c = -\dfrac{1}{2}$.
Donc l'application φ_p définie par $\varphi_p(x) = \dfrac{-1}{2}e^{-5x}$ est une solution particulière de l'équation.
• **Conclusion :** L'ensemble des solutions de $y' + 3y = e^{-5x}$ est donc

$$\mathcal{S} = \{x \mapsto \lambda e^{-3x} - \frac{1}{2}e^{-5x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

2. $y' + y = xe^{-x}$.

• **Identification** Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre de la forme polynôme-exponentielle. On peut donc appliquer les théorèmes du cours avec $a_0 = 1$, $P = x$ et $\alpha = -1$.

• **Solutions de l'équation homogène**
L'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\mathcal{S}_0 = \{x \mapsto \lambda e^{-x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

• **Solution particulière**

On cherche une solution particulière sous la forme $\varphi_p(x) = x(ax+b)e^{-x}$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ (Q est un polynôme de même degré que $P(x) = x$, donc de degré 1 de la forme $ax+b$ et -1 est racine du polynôme $x+1$).
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi_p'(x) = (2ax+b-ax^2-bx)e^{-x}$.
Alors φ_p est solution de $y'+y = xe^{-x}$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_p'(x) + \varphi_p(x) = xe^{-x},$$

soit encore, si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(2ax+b-ax^2-bx+ax^2+bx)e^{-x} = xe^{-x},$$

soit si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$2ax+b = x.$$

Finalement, φ_p est solution de l'équation si et seulement si

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 0 \end{cases}.$$

Donc l'application φ_p définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\varphi_p(x) = \dfrac{1}{2}x^2e^{-x}$ est une solution particulière.

• **Conclusion :** L'ensemble des solutions de $y'+y = xe^{-x}$ est donc

$$\mathcal{S} = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \lambda e^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

3. $y' + 2y = x^2\mathrm{e}^{-2x} + 2\mathrm{e}^{3x} + 1 + x$

• **Identification** Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients et second membre continus.

• **Solutions de l'équation homogène** Les solutions de l'équation homogène sont

$$\mathcal{S}_h = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \lambda e^{-2x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

• **Solution particulière**
On va chercher une solution particulière de $y'+2y = x^2e^{-2x} + 2e^{3x} + 1 + x$. On remarque que le second membre est une combinaison linéaire de fonctions "polynôme-exponentielle".
On va donc utiliser le principe de superposition des solutions. On commence par chercher des solutions particulières pour chaque terme du second membre, puis on les ajoute pour obtenir une solution particulière de l'équation différentielle de l'énoncé.

— Solution particulière avec second membre x^2e^{-2x}.
On cherche une solution sous la forme $\varphi_1(x) = x^mQ(x)e^{-2x}$ avec Q de degré 2 et $m = 1$ (-2 est racine de $X+2$) , soit $\varphi_1(x) = x(ax^2+bx+c)e^{-2x}$, où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. En dérivant φ_1 et après calculs, on trouve que φ_1 est solution de $y'+2y = x^2e^{-2x}$ si et seulement si

$$\varphi_1(x) = \frac{x^3}{3}\ e^{-2x}.$$

— Solution particulière avec second membre $2e^{3x}$. On cherche une solution sous la forme $\varphi_2(x) = x^mQ(x)e^{3x}$ avec Q de degré 0 et $m = 0$ (3 n'est pas racine de $X+2$) , soit $\varphi_1(x) = ce^{3x}$, où $c \in \mathbb{R}$. En dérivant φ_2 et après calculs, on trouve que φ_2 est solution de $y'+2y = 2e^{3x}$ si et seulement si

$$\varphi_2(x) = \frac{2}{5}e^{3x}.$$

— Solution particulière avec second membre $1+x$. On cherche une solution sous la forme $\varphi_3(x) = x^mQ(x)e^{0x}$ avec Q de degré 1 et $m = 0$ (0 n'est pas racine de $X+2$), soit $\varphi_3(x) = (ax+b)e^{0x} = ax+b$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. En dérivant φ_3 et après calculs, on trouve φ_3 est solution de $y'+2y = 1+x$ si et seulement si

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}.$$

D'après le principe de superposition des solutions, on en déduit que $y'+2y = x^2e^{-2x} + 2e^{3x} + 1 + x$ a pour solution particulière l'application φ_p définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\varphi_p(x) = \frac{x^3}{3}\ e^{-2x} + \frac{2}{5}e^{3x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}.$$

• **Conclusion :** L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'+2y = x^2e^{-2x} + 2e^{3x} + 1 + x$ est

$$\mathcal{S} = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \lambda e^{-2x} + \frac{x^3}{3}e^{-2x} + \frac{2}{5}e^{3x} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

4. $y' - y = \operatorname{sh}(x) + 1$

• **Identification** Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients et second membre continus.

• **Solutions de l'équation homogène** Les solutions de l'équation homogène sont

$$\mathcal{S}_h = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \lambda e^x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

• **Solution particulière** On va chercher une solution particulière de $y' - y = \operatorname{sh}(x) + 1 = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} + 1$. On remarque que le second membre est une combinaison linéaire de fonctions "polynôme-exponentielle".
On va donc utiliser le principe de superposition des solutions. On commence par chercher des solutions particulières pour chaque terme du second membre, puis on les ajoute pour obtenir une solution particulière de l'équation différentielle de l'énoncé.

— Solution particulière avec second membre e^x.
On cherche une solution sous la forme $\varphi_1(x) = x^m Q(x) e^x$ avec Q de degré 0 et $m = 1$ (car 1 est racine de $X - 1$), soit $\varphi_1(x) = cxe^x$, où $c \in \mathbb{R}$. Après calculs, on trouve que φ_1 est solution de $y' - y = e^x$ si et seulement si
$$\varphi_1(x) = xe^x.$$
— Solution particulière avec second membre e^{-x}. On cherche une solution sous la forme $\varphi_2(x) = x^m Q(x) e^{-x}$ avec Q de degré 0 et $m = 0$, soit $\varphi_2(x) = ce^{-x}$, où $c \in \mathbb{R}$. Après calculs, on trouve que φ_2 est solution de $y' - y = e^{-x}$ si et seulement si
$$\varphi_2(x) = \frac{-1}{2}e^{-x}.$$
— Solution particulière avec second membre 1. L'application φ_3 définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\varphi_3(x) = -1$ est une solution particulière évidente de l'équation $y' - y = 1$.

D'après le principe de superposition des solutions, on en déduit que $y' - y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + 1$ a pour solution particulière l'application φ_p définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\varphi_p(x) = \frac{1}{2}\varphi_1(x) - \frac{1}{2}\varphi_2(x) + \varphi_3(x) = \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{4}e^{-x} - 1.$$

• **Conclusion :** L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - y = \operatorname{sh}(x) + 1$ est donc

$$\mathcal{S} = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \lambda e^x + \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{4}e^{-x} - 1. \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

5. $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^x\cos(2x).$
(voir détails dans les notes de l'ex 1 + vidéo)

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $t^2y' - y = 0,$
2. $ty' - y = t,$
3. $ty' - 2y = t^4,$
4. $t(1+t^2)y' - (t^2-1)y = -2t.$

---

1. $t^2y' - y = 0.$
   - **Identification :** Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène scalaire du premier ordre à coefficients continus, sous forme non résolue dont le coefficient t^2 de y' s'annule en 0.
   - **Résolution sur les intervalles de non annulation de t^2 :** Posons $J_1 = \mathbb{R}_+^*$ et $J_2 = \mathbb{R}_-^*$. Soit $i \in \{1, 2\}$.
     - **Identification :** La résolution de l'équation $t^2y' - y = 0$ sur J_i se ramène à celle de l'équation $y' = \frac{1}{t^2}y$ sur J_i car t^2 ne s'annule pas sur J_i. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire homogène du premier ordre à coefficients continus sur J_i.
     - **Résolution de l'équation (homogène) :** Une primitive de $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ est par exemple l'application $t \longmapsto -\frac{1}{t}$.
     L'ensemble des solutions sur J_i de l'équation homogène est donc
     $$\mathcal{S}_h = \left\{ J_i \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

- **Résolution de l'équation sur $\mathbb{R}$:**
  - **Raccordement des solutions au point** 0 **:**
    Soit φ une solution de l'équation définie sur $\mathbb{R}$. D'après le point précédent, il existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que
    $$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda_1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}} \text{ si } t > 0 \\ \lambda_2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}} \text{ si } t < 0 \end{cases}.$$
    φ étant continue en 0, on a $\lim\limits_{t \to 0^+} \varphi(t) = \lim\limits_{t \to 0^-} \varphi(t) = \varphi(0)$.
    Or $\lim\limits_{t \to 0^+} \varphi(t) = \lim\limits_{t \to 0^+} \lambda_1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}} = 0$ et $\lim\limits_{t \to 0^-} \varphi(t) = \lim\limits_{t \to 0^-} \lambda_2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}} = \begin{cases} \pm\infty \text{ si } \lambda_2 \neq 0 \\ 0 \text{ si } \lambda_2 = 0 \end{cases}$.
    Donc nécessairement $\lambda_2 = 0$ et $\varphi(0) = 0$.
    Donc φ est définie par
    $$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda_1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}} \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ si } t \leq 0 \end{cases}. \tag{1}$$
  - **Étude réciproque :** Réciproquement, soient $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et soit φ_{λ_1} l'application donnée ci-dessus. Étudions la dérivabilité de φ_{λ_1} et regardons si elle vérifie l'équation sur $\mathbb{R}$.
    La restriction de φ_{λ_1} aux intervalles ouverts J_1 et J_2 est dérivable, donc φ_{λ_1} est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et vérifie l'équation différentielle en tout point de $\mathbb{R}^*$. Regardons au point 0.
    On a
    $$\frac{\varphi_{\lambda_1}(t) - \varphi_{\lambda_1}(0)}{t} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}} - 0}{t} = \lambda_1 \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}}{t} \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0 \\ \dfrac{0-0}{t} = 0 \xrightarrow[t \to 0^-]{} 0 \end{cases}.$$
    Donc φ_{λ_1} est dérivable en 0 de dérivée $\varphi'_{\lambda_1}(0) = 0$.
    De plus, on a $0^2 \varphi'_{\lambda_1}(0) - \varphi_{\lambda_1}(0) = 0$ donc φ_{λ_1} est solution de l'équation en 0 et donc sur $\mathbb{R}$ d'après ce qui précède.
- **Conclusion :** L'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de $t^2 y' - y = 0$ est donc
  $$\mathcal{S} = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,;\, t \longmapsto \varphi_{\lambda_1} \mid \lambda_1 \in \mathbb{R} \right\},$$
  espace vectoriel de dimension 1.

2. $ty' - y = t$
   - **Identification :** Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients continus, sous forme non résolue dont le coefficient t de y' s'annule en 0.
   - **Résolution de l'équation sur les intervalles de non annulation de** t **:** Posons $J_1 = \mathbb{R}_+^*$ et $J_2 = \mathbb{R}_-^*$. Soit $i \in \{1, 2\}$.
     - **Identification :** La résolution de l'équation $ty' - y = t$ sur J_i se ramène à celle de l'équation $y' = \dfrac{1}{t} y + 1$ car t ne s'annule pas. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients continus sur J_i.
     - **Solutions de l'équation homogène :** L'ensemble des solutions de l'équation homogène sur J_i est
       $$\mathcal{S}_h = \{ J_i \longrightarrow \mathbb{R} \,;\, t \longmapsto \lambda t \mid \lambda \in \mathbb{R} \}.$$
     - **Solution particulière :** Appliquons la méthode de variation de la constante.
       Cherchons une solution particulière φ_p de l'équation définie sur J_i sous la forme $\varphi_p(t) = \psi(t) t$ où ψ est une fonction dérivable de J_i dans $\mathbb{R}$.
       Alors φ_p est solution de l'équation si et seulement si, pour tout $t \in J_i$,
       $$t^2 \psi'(t) = t,$$
       soit encore, si et seulement si, pour tout $t \in J_i$, $\psi'(t) = \dfrac{1}{t}$.
       Par exemple, choisissons pour ψ la fonction $\psi : t \longmapsto \ln(|t|)$.
       La fonction $\varphi_p : J_i \longrightarrow \mathbb{R} \,;\, t \longmapsto t \ln(|t|)$ est alors une solution particulière de l'équation.
     - **Conclusion :** L'ensemble des solutions de l'équation sur J_i est donc
       $$\mathcal{S} = \{ J_i \longrightarrow \mathbb{R} \,;\, t \longmapsto \lambda t + t \ln(|t|) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}.$$
   - **Résolution de l'équation sur** $\mathbb{R}$ **:** Soit φ une éventuelle solution de l'équation sur $\mathbb{R}$. D'après le point précédent, il existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que
     $$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda_1 t + t \ln(|t|) \text{ si } t > 0 \\ \lambda_2 t + t \ln(|t|) \text{ si } t < 0 \end{cases}$$
     φ étant continue en 0, on a $\lim\limits_{t \to 0^+} \varphi(t) = \lim\limits_{t \to 0^-} \varphi(t) = \varphi(0)$.
     Or $\lim\limits_{t \to 0^+} \varphi(t) = \lim\limits_{t \to 0^+} \lambda_1 t + t \ln(|t|) = 0$ et $\lim\limits_{t \to 0^-} \varphi(t) = \lim\limits_{t \to 0^-} \lambda_2 t + t \ln(|t|) = 0$.

Donc nécessairement $\varphi(0) = 0$.
Donc φ est définie par

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t = 0, \\ \lambda_1 t + t\ln(|t|) \text{ si } t > 0 \\ \lambda_2 t + t\ln(|t|) \text{ si } t < 0 \end{cases}. \tag{2}$$

– **Étude réciproque :** Réciproquement, soient $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ et soit $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ l'application donnée ci-dessus.
Étudions la dérivabilité de $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ et regardons si elle vérifie l'équation sur $\mathbb{R}$.
La restriction de $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ aux intervalles ouverts J_1 et J_2 est dérivable, donc $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et vérifie l'équation différentielle en tout point de $\mathbb{R}^*$. Regardons au point 0.
On a

$$\frac{\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(t) - \varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(0)}{t} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1 t + t\ln(t) - 0}{t} = \lambda_1 + \ln(t) \quad \xrightarrow[t\to 0^+]{} -\infty \\ \dfrac{\lambda_2 t + t\ln(-t) - 0}{t} = \lambda_2 + \ln(-t) \quad \xrightarrow[t\to 0^-]{} -\infty \end{cases}.$$

Donc $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ n'est dérivable en 0.
L'équation n'admet donc pas de solutions définies sur $\mathbb{R}$.

- **Conclusion :** L'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de $ty' - y = t$ est donc l'ensemble vide.

3. $ty' - 2y = t^4$

– **Identification :** Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients continus, sous forme non résolue dont le coefficient t de y' s'annule en 0.

– **Résolution de l'équation sur les intervalles de non annulation de t :** Posons $J_1 = \mathbb{R}_+^*$ et $J_2 = \mathbb{R}_-^*$. Soit $i \in \{1, 2\}$.

  – **Identification :** La résolution de l'équation $ty' - 2y = t^4$ sur J_i se ramène à celle de l'équation $y' = \dfrac{2}{t}y + t^3$ car t ne s'annule pas. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients continus sur J_i.

  – **Solutions de l'équation homogène :** L'ensemble des solutions de l'équation homogène sur J_i est

$$\mathcal{S}_h = \left\{ J_i \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda t^2 \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

  – **Solution particulière :** Appliquons la méthode de variation de la constante.
  Cherchons une solution particulière φ_p de l'équation définie sur J_i sous la forme $\varphi_p(t) = \psi(t)t^2$ où ψ est une fonction dérivable de J_i dans $\mathbb{R}$.
  Alors φ_p est solution de l'équation si et seulement si, pour tout $t \in J_i$,

$$t^3\psi'(t) = t^4,$$

  soit encore, si et seulement si, pour tout $t \in J_i$, $\psi'(t) = t$.
  Par exemple, choisissons pour ψ la fonction $\psi : t \longmapsto \dfrac{1}{2}t^2$.
  La fonction $\varphi_p : J_i \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \dfrac{1}{2}t^4$ est alors une solution particulière de l'équation.

  – **Conclusion :** L'ensemble des solutions de l'équation sur J_i est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ J_i \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda t^2 + \frac{1}{2}t^4 \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

– **Résolution de l'équation sur $\mathbb{R}$:** Soit φ une éventuelle solution de l'équation sur $\mathbb{R}$. D'après le point précédent, il existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda_1 t^2 + \dfrac{1}{2}t^4 \text{ si } t > 0 \\ \lambda_2 t^2 + \dfrac{1}{2}t^4 \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

φ étant continue en 0, on a $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi(t) = \lim\limits_{t\to 0^-} \varphi(t) = \varphi(0)$.
Or $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} \lambda_1 t^2 + \dfrac{1}{2}t^4 = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0^-} \varphi(t) = \lim\limits_{t\to 0^-} \lambda_2 t^2 + \dfrac{1}{2}t^4 = 0$.
Donc nécessairement $\varphi(0) = 0$.
Donc nécessairement, φ est définie par

$$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda_1 t^2 + \dfrac{1}{2}t^4 \text{ si } t \geq 0 \\ \lambda_2 t^2 + \dfrac{1}{2}t^4 \text{ si } t < 0 \end{cases}. \tag{3}$$

– **Étude réciproque :** Réciproquement, soient $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ et soit $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ l'application donnée ci-dessus.
Étudions la dérivabilité de $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ et regardons si elle vérifie l'équation sur $\mathbb{R}$.
La restriction de $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ aux intervalles ouverts J_1 et J_2 est dérivable, donc $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et vérifie l'équation différentielle en tout point de $\mathbb{R}^*$. Regardons au point 0.

On a

$$\frac{\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(t)-\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(0)}{t}=\begin{cases}\dfrac{\lambda_1 t^2+\frac{1}{2}t^4-0}{t}=\lambda_1 t+\frac{1}{2}t^3 & \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0\\ \dfrac{\lambda_2 t^2+\frac{1}{2}t^4-0}{t}=\lambda_2 t+\frac{1}{2}t^3 & \xrightarrow[t\to 0^-]{} 0\end{cases}.$$

Donc $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ est dérivable en 0 de dérivée $\varphi'(0)$.
De plus, on a $0\varphi'_{\lambda_1,\lambda_2}(0)-2\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(0)=0^4$ donc $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ est solution de l'équation en 0 et donc sur $\mathbb{R}$ d'après ce qui précède.

-**Conclusion :** L'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de $ty'-2y=t^4$ est donc

$$\mathcal{S}=\left\{\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\ ;\ t\longmapsto\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}\mid(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2\right\},$$

espace affine de dimension 2.

4. $t(1+t^2)y'-(t^2-1)y=-2t$
   - **Identification :** Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients continus, sous forme non résolue dont le coefficient $t(1+t^2)$ de y' s'annule en 0.
   - **Résolution de l'équation sur les intervalles de non annulation de** $t(1+t^2)$ **:** Posons $J_1=\mathbb{R}_+^*$ et $J_2=\mathbb{R}_-^*$. Soit $i\in\{1,2\}$.
     - **Identification :** La résolution de l'équation $t(1+t^2)y'-(t^2-1)y=-2t$ sur J_i se ramène à celle de l'équation $y'=\dfrac{t^2-1}{t(1+t^2)}y-\dfrac{2t}{t(1+t^2)}$ car $t(1+t^2)$ ne s'annule pas sur J_i. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients continus sur J_i.
     - **Solutions de l'équation homogène :**

       A l'aide d'une décomposition en éléments simples, on a $\dfrac{t^2-1}{t(1+t^2)}=\dfrac{-1}{t}+\dfrac{2t}{1+t^2}$, donc une primitive de $t\longmapsto\dfrac{t^2-1}{t(1+t^2)}$ est $t\longmapsto\ln\left(\dfrac{t^2+1}{|t|}\right)$.
       L'ensemble des solutions de l'équation homogène sur J_i est donc

       $$\mathcal{S}_h=\left\{J_i\longrightarrow\mathbb{R}\ ;\ t\longmapsto\lambda\frac{t^2+1}{t}\mid\lambda\in\mathbb{R}\right\}.$$

     - **Solution particulière :** Appliquons la méthode de variation de la constante.

       Cherchons une solution particulière φ_p de l'équation définie sur J_i sous la forme $\varphi_p(t)=\psi(t)\dfrac{t^2+1}{t}$ où ψ est une fonction dérivable de J_i dans $\mathbb{R}$.
       Alors φ_p est solution de l'équation si et seulement si, pour tout $t\in J_i$,

       $$\frac{t^2+1}{t}\psi'(t)=-\frac{2t}{1+t^2},$$

       soit encore, si et seulement si, pour tout $t\in J_i$, $\psi'(t)=\dfrac{-2t}{(1+t^2)^2}$.
       Par exemple, choisissons pour ψ la fonction $\psi:t\longmapsto\dfrac{1}{1+t^2}$.
       La fonction $\varphi_p:J_i\longrightarrow\mathbb{R}\ ;\ t\longmapsto\dfrac{1}{t}$ est alors une solution particulière de l'équation.
     - **Conclusion :** L'ensemble des solutions de l'équation sur J_i est donc

       $$\mathcal{S}=\left\{J_i\longrightarrow\mathbb{R}\ ;\ t\longmapsto\lambda\frac{t^2+1}{t}+\frac{1}{t}\mid\lambda\in\mathbb{R}\right\}.$$

   - **Résolution de l'équation sur** $\mathbb{R}$ **:** Soit φ une éventuelle solution de l'équation sur $\mathbb{R}$. D'après le point précédent, il existe $\lambda_1\in\mathbb{R}$ et $\lambda_2\in\mathbb{R}$ tels que

     $$\varphi(t)=\begin{cases}\lambda_1\dfrac{t^2+1}{t}+\dfrac{1}{t} & \text{si } t>0\\ \lambda_2\dfrac{t^2+1}{t}+\dfrac{1}{t} & \text{si } t<0\end{cases}$$

     φ étant continue en 0, on a $\lim\limits_{t\to 0^+}\varphi(t)=\lim\limits_{t\to 0^-}\varphi(t)=\varphi(0)$.
     Or $\lim\limits_{t\to 0^+}\varphi(t)=\lim\limits_{t\to 0^+}\lambda_1\dfrac{t^2+1}{t}+\dfrac{1}{t}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1+\lambda_1}{t}+\lambda_1 t=\begin{cases}0\text{ si }\lambda_1=-1\\ \pm\infty\text{ sinon}\end{cases}$
     et $\lim\limits_{t\to 0^-}\varphi(t)\lim\limits_{t\to 0^-}\lambda_2\dfrac{t^2+1}{t}+\dfrac{1}{t}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1+\lambda_2}{t}+\lambda_2 t=\begin{cases}0\text{ si }\lambda_2=-1\\ \pm\infty\text{ sinon}\end{cases}$.
     Donc nécessairement $\lambda_1=\lambda_2=-1$ et $\varphi(0)=0$.
     Donc nécessairement, φ est définie, pour tout $t\in\mathbb{R}$, par

     $$\varphi(t)=-t. \tag{4}$$

- Réciproquement, cette application est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on vérifie que cette application est bien solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation.

-**Conclusion :** L'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ est donc

$$\mathcal{S} = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto -t\} \, ,$$

espace affine de dimension 0.

Exercice 3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} (1-t)y' - y = t, \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

1. Que dit le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire ?
2. Déterminer, selon les valeurs de α, les éventuelles solutions de ce problème de Cauchy définies sur $\mathbb{R}$.

---

1. Sur l'intervalle $]-\infty, 1[$, l'équation $(1-t)y' - y = t$ se ramène à $y' = \dfrac{1}{1-t}y + \dfrac{t}{1-t}$ et les fonctions $t \longmapsto \dfrac{1}{1-t}$ et $t \longmapsto \dfrac{t}{1-t}$ sont continues sur $]-\infty, 1[$. Comme $0 \in]-\infty, 1[$, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, ce problème de Cauchy admet une unique solution définie sur l'intervalle $]-\infty, 1[$.
   Les fonctions $t \longmapsto \dfrac{1}{1-t}$ et $t \longmapsto \dfrac{t}{1-t}$ n'étant pas définies en 1, le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire ne donne pas d'information sur des solutions définies sur un intervalle contenant 1.
2. Commençons par résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(1-t)y' - y = t$.
   - **Identification :** Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients continus, sous forme non résolue dont le coefficient $1-t$ de y' s'annule en 1.
   - **Résolution de l'équation sur les intervalles de non annulation de** $1-t$ **:** Posons $J_1 =]-\infty, 1[$ et $J_2 =]1, +\infty[$. Soit $i \in \{1, 2\}$.
     - **Identification :** La résolution de l'équation $(1-t)y' - y = t$ sur J_i se ramène à celle de l'équation $y' = \dfrac{1}{1-t}y + \dfrac{t}{1-t}$ car $1-t$ ne s'annule pas sur J_i. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients continus sur J_i.
     - **Solutions de l'équation homogène :**
       Une primitive de $t \longmapsto \dfrac{1}{1-t}$ est $t \longmapsto -\ln(|1-t|) = \ln\left(\dfrac{1}{|1-t|}\right)$.
       L'ensemble des solutions de l'équation homogène sur J_i est donc
       $$\mathcal{S}_h = \left\{ J_i \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \lambda \frac{1}{1-t} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$
     - **Solution particulière :** Appliquons la méthode de variation de la constante.
       Cherchons une solution particulière φ_p de l'équation définie sur J_i sous la forme $\varphi_p(t) = \psi(t)\dfrac{1}{1-t}$ où ψ est une fonction dérivable de J_i dans $\mathbb{R}$.
       Alors φ_p est solution de l'équation si et seulement si, pour tout $t \in J_i$,
       $$\psi'(t) = t.$$
       Par exemple, choisissons pour ψ la fonction $\psi : t \longmapsto \dfrac{1}{2}t^2$.
       La fonction $\varphi_p : J_i \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \dfrac{t^2}{2(1-t)}$ est alors une solution particulière de l'équation.
     - **Conclusion :** L'ensemble des solutions de l'équation sur J_i est donc
       $$\mathcal{S} = \left\{ J_i \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \lambda \frac{1}{1-t} + \frac{t^2}{2(1-t)} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$
   - **Résolution de l'équation sur** $\mathbb{R}$ **:** Soit φ une éventuelle solution de l'équation sur $\mathbb{R}$. D'après le point précédent, il existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que
     $$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda_1 \dfrac{1}{1-t} + \dfrac{t^2}{2(1-t)} & \text{si } t > 1 \\ \lambda_2 \dfrac{1}{1-t} + \dfrac{t^2}{2(1-t)} & \text{si } t < 1 \end{cases}$$
     φ étant continue en 1, on a $\lim\limits_{t \to 1^+} \varphi(t) = \lim\limits_{t \to 1^-} \varphi(t) = \varphi(1)$.

Or $\lim_{t\to 1^+} \varphi(t) = \lim_{t\to 1^+} \frac{1}{2}\frac{t^2+2\lambda_1}{1-t} = \begin{cases} -1 \text{ si } \lambda_1 = -\frac{1}{2} \\ \pm\infty \text{ sinon} \end{cases}$ et $\lim_{t\to 1^-} \varphi(t) = \lim_{t\to 1^-} \frac{1}{2}\frac{t^2+2\lambda_2}{1-t} = \begin{cases} -1 \text{ si } \lambda_2 = -\frac{1}{2} \\ \pm\infty \text{ sinon} \end{cases}$.

Donc nécessairement $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}$ et $\varphi(1) = -1$.

Donc nécessairement, φ est définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par

$$\varphi(t) = -\frac{1}{2}(t+1). \tag{5}$$

– Réciproquement, cette application est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on vérifie que cette application est bien solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation.

-**Conclusion :** L'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de $(1-t)y' - y = t$ est donc

$$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto -\frac{1}{2}(t+1)\right\},$$

espace affine de dimension 0.

En 0, la seule solution de l'équation $(1-t)y' - y = t$ vaut donc $-\frac{1}{2}$.

Ainsi le problème de Cauchy admet une unique solution définie sur $\mathbb{R}$ si $\alpha = -\frac{1}{2}$ et n'en admet aucune sinon.

Exercice 4. Déterminer les fonctions $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que, pour tout $x \in [0,+\infty[$,

$$\int_0^x (x-3t)f(t)\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}.$$

• Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant la relation donnée dans l'énoncé.

Alors, pour tout $x \in [0,+\infty[$,

$$x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - 3\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}.$$

La fonction f étant continue, les fonctions f et $t \longmapsto tf(t)$ sont continues. Les fonctions $x \longmapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ et $x \longmapsto \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$ sont donc de classe $\mathcal{C}^1$, et en dérivant la relation précédente, on obtient, pour tout $x \in [0,+\infty[$,

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + xf(x) - 3xf(x) = x,$$

soit encore, pour tout $x \in [0,+\infty[$,

$$-2xf(x) + \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = x. \tag{*}$$

On en déduit que pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$f(x) = \frac{1}{2x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}.$$

f étant continue, $x \longmapsto \frac{1}{2x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

En dérivant la relation $(*)$, on obtient alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$-2f(x) - 2xf'(x) + f(x) = 1,$$

soit encore, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$2xf'(x) + f(x) = -1.$$

Ainsi, f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $2xy' + y = -1$.

Résolvons cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$.

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients et second membre continus sur $\mathbb{R}_+^*$.

Une primitive de $x \longmapsto -\frac{1}{2x}$ est $x \longmapsto -\frac{1}{2}\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène est donc

$$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \lambda\frac{1}{\sqrt{x}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Une solution particulière évidente est l'application $x \longmapsto -1$.

L'ensemble des solutions de l'équation $2xy' + y = -1$ est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; x \longmapsto \lambda \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

f étant solution de cette équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{x}} - 1.$$

Or f est continue en 0. Donc nécessairement, $\lambda = 0$, et donc pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = -1$.

• Réciproquement, l'application $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; x \longmapsto -1$ est continue et, pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$\int_0^x (x - 3t) f(t) \mathrm{d}t = \int_0^x (-x + 3t) \mathrm{d}t = -x \, [t]_0^x + 3 \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x = -x^2 + \frac{3}{2} x^2 = \frac{x^2}{2}.$$

Donc f vérifie bien la relation de l'énoncé.

• Ainsi, il existe une unique fonction vérifiant les conditions de l'énoncé, la fonction constante égale à -1.