Ex 1

Les coefficients sont constants et les seconds membres sont de la forme polynôme-exponentielle

4. $sh(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{2}e^{-x}$ → superposition des solutions.

Utilise la prop 14 du cours : $y' + a_0 y = P(t)e^{\alpha t}$

On cherche φ_p sous la forme $\varphi_p(t) = t^m \phi(t) e^{\alpha t}$ où $\begin{cases} m=0 \text{ si } \alpha \text{ n'est pas racine de } X + a_0 \\ m=1 \text{ sinon} \end{cases}$

1. $1e^{-5x}$ $P(x) = 1$, $\alpha = -5$ $\varphi_p(x) = ce^{-5x}$

2. xe^{-x} $P(x) = x$, $\alpha = -1$ $\varphi_p(x) = x^1(ax+b)e^{-x}$

3. $\underbrace{x^2 e^{-2x}}_{b_1(x)} + \underbrace{2e^{3x}}_{b_2(x)} + \underbrace{1+x}_{b_3(x)}$ → superposition des solutions

$y' + 2y = 1 + x$
$= (1+x)e^{0x}$ $\varphi_p(x) = (ax+b)e^{0x} = ax + b$.

5. $\begin{cases} y' - y = \cos(x) + e^{x}\sin(2x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$

- Identification : à coefficients constants
- Résolution de $y' - y = 0$: $S_h = \{\mathbb{R} \to \mathbb{R} ; x \mapsto \lambda e^{x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- Solution particulière de $y' - y = \underbrace{\cos(x)}_{b_1(x)} + \underbrace{e^{x}\sin(2x)}_{b_2(x)}$

  - $y' - y = \cos(x) = Re(e^{ix})$ (2)

Cherchons une solution particulière de $y' - y = 1e^{ix}$ (1) $X - 1$

$\varphi_{p,\mathbb{C}}(x) = x^m \phi(x) e^{ix}$ avec $m = 0$ et $d^\circ\phi = 0$
$= ce^{ix}$ où $c \in \mathbb{C}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi_{p,\mathbb{C}}'(x) = cie^{ix}$.

Alors $\varphi_{p,\mathbb{C}}$ est solution de (1) ssi $cie^{ix} - ce^{ix} = e^{ix}$

ssi $c(i-1) = 1$

ssi $c = \dfrac{1}{i-1} = \dfrac{i+1}{-2}$

Donc $\varphi_{p,\mathbb{C}}(x) = \frac{1}{2}(-1-i)e^{ix} = \frac{1}{2}(-1-i)(\cos(x) + i\sin(x))$

Donc $\varphi_1 = Re(\varphi_{p,\mathbb{C}}) = -\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)$ (au brouillon, on peut vérifier)

• Cherchons une solution particulière de $y' - y = e^{x}\sin(2x)$

$$= \mathrm{Im}(e^{x} e^{2ix})$$
$$= \mathrm{Im}(e^{x(1+2i)}).$$

On cherche une solution particulière de $y'-y = 1e^{x(1+2i)}$.

Alors $\tilde{\varphi}_{p,\mathbb{C}}(x) = x^m Q(x) e^{x(1+2i)}$ où $m=0$ et $d^\circ Q = 0$

$= c\, e^{x(1+2i)}$ où $c \in \mathbb{C}$.

Alors $\tilde{\varphi}_{p,\mathbb{C}}'(x) = c(1+2i)e^{x(1+2i)}$.

Alors $\tilde{\varphi}_{p,\mathbb{C}}$ est solution de $y'-y = e^{x(1+2i)}$

ssi $c(1+2i) - c = 1$ ssi $2ic = 1$ ssi $c = \frac{1}{2i}$
$= -\frac{i}{2}$.

Donc $\tilde{\varphi}_{p,\mathbb{C}}(x) = -\frac{i}{2}e^{x(1+2i)}$

$= -\frac{i}{2}\, e^{x}\,(\cos(2x) + i\sin(2x))$

Donc $\varphi_2 = \mathrm{Im}(\tilde{\varphi}_{p,\mathbb{C}}(x)) = -\frac{1}{2}e^{x}\cos(2x)$ est solution particulière de $y'-y = e^{x}\sin(2x)$.

$\varphi_2' = -\frac{1}{2}e^{x}\cos(x) + e^{x}\sin(2x)$

Donc $\varphi_1 + \varphi_2$ est une solution particulière de (S).

<u>Conclusion</u> $S = \{\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,;\, x \mapsto \lambda e^{x} - \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}e^{x}\cos(2x),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

• On cherche <u>la</u> solution du problème de Cauchy $\begin{cases} (S) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $(\mathcal{C})$

φ est solution de $(\mathcal{C})$ ssi

$\varphi(x) = \lambda e^{x} - \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}e^{x}\cos(2x)$ où $\lambda\in\mathbb{R}$

et $\varphi(0) = 0$.

Or $\varphi(0) = \lambda - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \lambda - 1$.

Donc φ est solution de $(\mathcal{C})$ ssi $\lambda = 1$.

ie, $\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,;\, x \mapsto e^{x} - \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}e^{x}\cos(2x)$.