Exercice d'entraînement OPPH

Dans le vide, on considère $\vec{E} = E_x \vec{u_x} + E_y \vec{u_y}$
avec $E_x = E_0 \exp\left[i\left(\frac{k}{3}(2x+2y+z) - \omega t\right)\right]$

On prend $\lambda = 6.10^{-7}$ m $= 600$ nm $\longrightarrow$ domaine visible
du coup $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 10{,}5 \cdot 10^{6}$ m^{-1}
et $f = \frac{c}{\lambda} = 5.10^{14}$ Hz

- Direction de propagation de l'onde : $\vec{u}$:
  $\vec{k} = k\vec{u}$ or $\vec{k} = \frac{k}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ donc $\vec{u} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$

- Plan d'onde ?
  <=> plan équiphase, points $\in$ surface : $2x + 2y + z = cste$
  On vérifie que le plan d'onde est $\perp$ $\vec{k}$

- E_y ?
  M.G. $\vec{\nabla}.\vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$
  $\Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial y} = -\frac{2ik}{3} E_0 \exp(\dots)$
  $\Rightarrow E_y = -E_x$

- $\vec{B}$?
  OPPH $\rightarrow$ $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{k}{3\omega}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}E_x\\-E_x\\0\end{pmatrix} = \frac{k}{3\omega}\begin{pmatrix}E_x\\+E_x\\-4E_x\end{pmatrix} = \frac{E_x}{3c}\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix}$

- $\langle u_{em} \rangle$?

$$u_{em,OPPH} = \varepsilon_0 E^2$$

$$\langle u_{em} \rangle = \varepsilon_0 \langle E^2 \rangle = \varepsilon_0 \langle E_0^2 \cos^2(\ldots) \rangle \times 2 = \varepsilon_0 E_0^2$$

- $\langle \vec{\Pi} \rangle$?

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right) = \frac{1}{2\mu_0} \mathrm{Re}\left(\frac{E_x E_x^*}{3c} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right)$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{6\mu_0 c} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{c E_0^2}{\underbrace{\mu_0 c^2}_{1/\varepsilon_0}} \times \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} = c E_0^2 \varepsilon_0 \vec{u}$$

Finalement $\underline{\langle \vec{\Pi} \rangle = c \langle u_{em} \rangle \vec{u}}$

l'energie du champ électromagnétique
se déplace à la vitesse c et selon $\vec{u}$