Opérateur Nabla :

École Centrale Pékin

2020-2021

1 Définition

1.1 Coordonnées cartésiennes

Opérateur Nabla

Le "Nabla" est un symbole qui ressemble à un triangle ou à la lettre grecque delta majuscule inversée : ∇. Pour se rendre compte de son caractère vectoriel, on l'écrit également $\vec{\nabla}$. Il représente un opérateur différentiel agissant sur les coordonnées de l'espace. En coordonnées cartésiennes, il s'écrit :

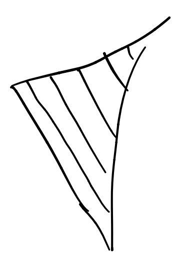
$$\vec{\nabla} = \vec{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

On peut aussi l'écrire dans la même base sous la forme matricielle :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

1.2 Historique

En 1837, le mathématicien et physicien irlandais William Rowan Hamilton introduit l'opérateur ∇ dans son ouvrage "On Differences and Differentials of Functions of Zero". L'intérêt mathématique a été développé pleinement par Peter Gutherie Tait.
James Clerk Maxwell le surnomma "atled" ("delta" à l'envers) initialement dans ses correspondances. Le nom nabla lui fut donné par Tait sur l'avis de William Robertson Smith, en 1870, par analogie de forme avec une harpe grecque qui, dans l'antiquité, portait ce nom.



2 Opérateurs d'analyse vectorielle

2.1 Opérateur gradient

L'expression du gradient d'un champ scalaire $V(x, y, z, t)$, dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est :

$$\overrightarrow{\text{grad}} V(x, y, z, t) = \vec{\nabla} V(x, y, z, t).$$

On peut aussi l'écrire :

$$\vec{\nabla} V(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V(x, y, z, t)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V(x, y, z, t)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial V(x, y, z, t)}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

2.2 Opérateur divergence

L'expression de la divergence d'un champ vectoriel $\vec{A}(x, y, z, t)$, dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est :

$$\text{div} \vec{A}(x, y, z, t) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x, y, z, t).$$

On peut aussi l'écrire :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x(x, y, z, t) \\ A_y(x, y, z, t) \\ A_z(x, y, z, t) \end{pmatrix}.$$

2.3 Opérateur rotationnel

L'expression du rotationnel d'un champ vectoriel $\vec{A}(x, y, z, t)$, dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(x, y, z, t) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(x, y, z, t).$$

On peut aussi l'écrire :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x(x, y, z, t) \\ A_y(x, y, z, t) \\ A_z(x, y, z, t) \end{pmatrix}.$$

2.4 Opérateur laplacien

On peut écrire le laplacien scalaire :

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \vec{\nabla}^2.$$

En coordonnées cartésiennes, il prend alors la forme :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

De la même façon, on peut écrire le laplacien vectoriel, appliqué à un champ $\vec{A}$:

$$\Delta\vec{A} = \vec{\nabla}^2 - \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}).$$

3 Autres systèmes de coordonnées

L'opérateur $\vec{\nabla}$ s'écrit en coordonnées cylindriques et sphériques de façon à maintenir la cohérence avec les expressions des les opérateurs d'analyse vectorielle de la section ci-dessus.

4 Equations de Maxwell

Les quatre équations de Maxwell

Dans un domaine $\mathcal{D}$ contenant potentiellement une densité volumique de charges $\rho(M,t)$ et de courants $\vec{j}(M,t)$, les équations de Maxwell s'écrivent :

① Équation de Maxwell-Gauss :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(M,t) = \frac{\rho(M,t)}{\varepsilon_0}.$$

② Équation de Maxwell-flux :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(M,t) = 0.$$

③ Équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}(M,t) = -\frac{\partial \overrightarrow{B}(M,t)}{\partial t}.$$

④ Équation de Maxwell-Ampère :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B}(M,t) = \mu_0 \vec{j}(M,t) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}(M,t)}{\partial t}.$$

5 Entraînement

On note $\vec{r}$, le vecteur position d'un point M, ne se trouvant pas à l'origine. En coordonnées cartésiennes, montrer que

- $\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3$;
- $\vec{\nabla} \wedge \vec{r} = \vec{0}$;
- $\vec{\nabla} r = \frac{\vec{r}}{r}$;
- $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$;
- $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0$.

1. $\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$