Rappels mathématiques d'analyse vectorielle :

École Centrale Pékin

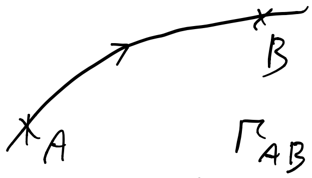
2020-2021

Table des matières

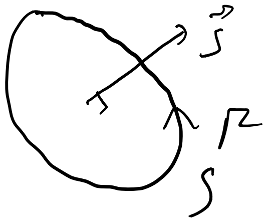
1 Circulation et flux d'un champ vectoriel

1.1 Orientation d'un arc, d'un contour, d'une surface

Orienter un arc, c'est choisir un sens de déplacement d'un point courant M sur cet arc. On signifie le choix de cette orientation à l'aide d'une flèche.



Lorsque l'arc est fermé sur lui même, il forme un contour fermé. Son orientation consiste à choisir un sens sur le contour au moyen d'une flèche. Orienter une surface, c'est choisir un sens pour la normale $\vec{n}$ en tout point de la surface.



Lorsque le contour sur lequel s'appuie la surface est déjà orienté, on oriente la surface par application de la règle de la main droite. Enfin, par convention, l'orientation de la **surface fermée** qui délimite un volume est de l'intérieur vers l'extérieur.

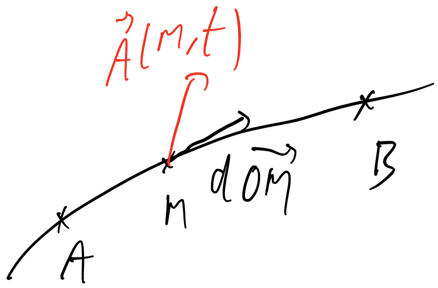
1.2 Circulation d'un vecteur le long d'une courbe orientée

En physique, un champ vectoriel quelconque $\vec{A}(M,t)$ peut être multiplié scalairement par un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$. La nouvelle quantité ainsi formée a une signification physique importante. On pense par exemple au travail d'une force en mécanique.

Circulation de champ vectoriel

La **circulation** du champ vectoriel $\vec{A}(M,t)$, le long du chemin orienté Γ_{AB}, est :

$$\mathcal{C}_{\vec{A},\Gamma_{AB}} = \int_{\Gamma_{AB}} \vec{A}(M,t) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}.$$



Si contour fermé : $\oint_\Gamma$

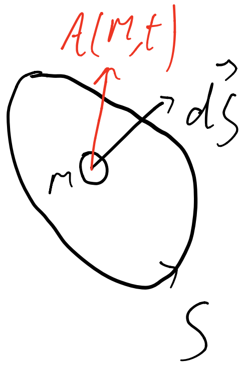
1.3 Flux d'un vecteur à travers une surface orientée

En physique, un champ vectoriel quelconque $\vec{A}(M,t)$ peut être multiplié scalairement par une surface élémentaire $\mathrm{d}\vec{S}$. La nouvelle quantité ainsi formée a une signification physique importante. On pense par exemple au courant électrique lorsqu'on considère un champ de densité volumique de courant.

Flux de champ vectoriel

Le **flux** du champ vectoriel $\vec{A}(M,t)$, à travers une surface orientée $\mathcal{S}$, est :

$$\varphi_{\vec{A},\mathcal{S}} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{A}(M,t) \cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$



Si surface fermée on note $\oiint_S$

2 Opérateurs d'analyse vectorielle

2.1 Opérateur gradient

Définition :
Entre deux positions M et M' infiniment voisines, telles que $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'}$, le champ scalaire V varie de façon infinitésimale de $V(M,t)$ à $V(M',t)$: $\mathrm{d}V = V(M',t) - V(M,t)$.
On définit alors le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}V$ gradient du champ V en M et t par la relation :

$$\mathrm{d}V = \overrightarrow{\text{grad}}V \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}.$$

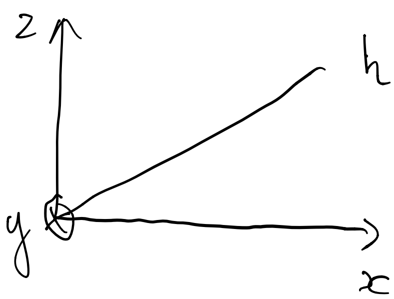
Propriétés :

- le vecteur gradient en M est dirigé vers les V croissants ;
- dans une zone où V est uniforme, le vecteur gradient est nul ;
- le vecteur gradient est perpendiculaire aux surfaces d'égale valeur de V.

2.1.1 Expression de gradient en coordonnées cartésiennes

L'expression du gradient d'un champ scalaire $V(x,y,z,t)$, dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est :

$$\overrightarrow{\text{grad}}V(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$$



$h(x,y) = ax$

$\overrightarrow{\text{grad}}\, h = a\,\vec{u}_x$

2.1.2 Expression de gradient en coordonnées cylindriques

L'expression du gradient d'un champ scalaire $V(r,\theta,z,t)$, dans la base $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$ est :

$$\overrightarrow{\text{grad}}V(r,\theta,z,t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$$

2.1.3 Expression de gradient en coordonnées sphériques

L'expression du gradient d'un champ scalaire $V(r,\theta,\varphi,t)$, dans la base $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$ est :

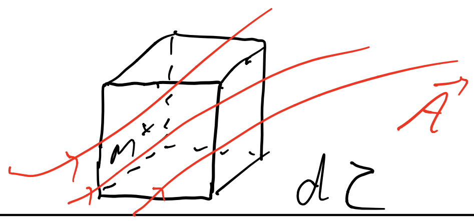
$$\overrightarrow{\text{grad}}V(r,\theta,\varphi,t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r\ \sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

2.2 Opérateur divergence

Définition :
On considère le volume élémentaire $\mathrm{d}\tau$ où il règne un champ vectoriel $\vec{A}$. On note $\delta\varphi_{\vec{A},\mathrm{d}\tau}$, le flux de $\vec{A}$ sortant du volume $\mathrm{d}\tau$. On définit la divergence au point M et au temps t, $\text{div}\vec{A}(M,t)$ par l'expression :

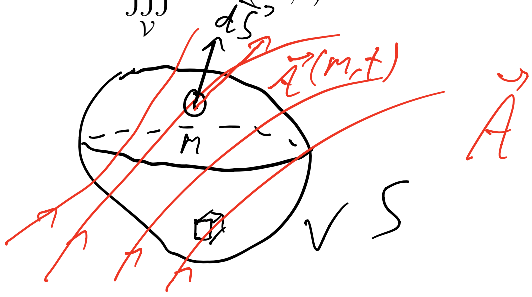
$$\delta\varphi_{\vec{A},\mathrm{d}\tau} = \text{div}\vec{A}(M,t)\mathrm{d}\tau.$$

La **divergence** de $\vec{A}$ est donc le flux de $\vec{A}$ par unité de volume. C'est un scalaire.



Théorème :
En intégrant la relation précédente sur un volume macroscopique $\mathcal{V}$ quelconque, entouré par la surface fermée $\mathcal{S}$, l'analyse vectorielle permet de démontrer le **théorème de Green Ostrogradski** :

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div}\vec{A}(M,t)\mathrm{d}\tau.$$



2.2.1 Expression de divergence en coordonnées cartésiennes

L'expression de la divergence d'un champ vectoriel $\vec{A}(x,y,z,t)$, dans la base $(\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ est :

$$\text{div}\vec{A}(x,y,z,t) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

2.2.2 Expression de divergence en coordonnées cylindriques

L'expression de la divergence d'un champ vectoriel $\vec{A}(r,\theta,z,t)$, dans la base $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$ est :

$$\mathrm{div}\vec{A}(r,\theta,z,t)=\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

2.2.3 Expression de divergence en coordonnées sphériques

L'expression de la divergence d'un champ vectoriel $\vec{A}(r,\theta,\varphi,t)$, dans la base $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$ est :

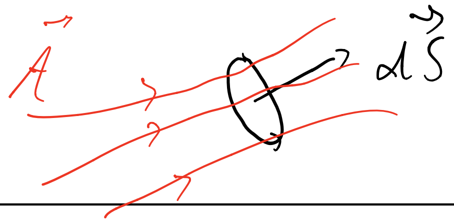
$$\mathrm{div}\vec{A}(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\ \sin\theta}\frac{\partial(A_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\ \sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}.$$

2.3 Opérateur rotationnel

Définition :
On considère une surface élémentaire $\mathrm{d}\vec{S}$ et un champ vectoriel $\vec{A}$. On note $\delta\mathcal{C}_{\vec{A},\mathrm{d}\vec{S}}$, le circulation de $\vec{A}$ le long d'un contour élémentaire fermé délimité par $\mathrm{d}\vec{S}$. On définit le rotationnel au point M et au temps t, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}(M,t)$ par l'expression :

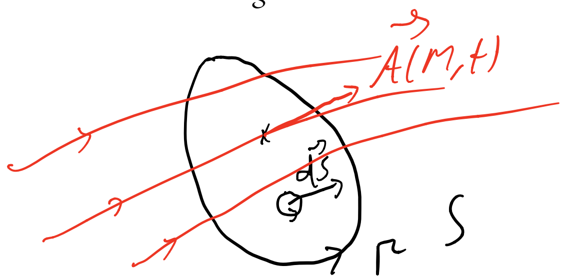
$$\delta\mathcal{C}_{\vec{A},\mathrm{d}\vec{S}}=\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}.$$

Le **rotationnel** est donc la circulation de $\vec{A}$ par unité de surface. C'est un vecteur.



Théorème :
En intégrant la relation précédente sur une surface macroscopique orientée $\mathcal{S}$ quelconque s'appuyant sur un contour Γ, qui est orienté conjointement à l'orientation de $\mathcal{S}$, l'analyse vectorielle permet de démontrer le **théorème de Stokes** :

$$\oint_\Gamma \vec{A}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}=\iint_{\mathcal{S}}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}(M,t)\cdot\mathrm{d}\vec{S}.$$



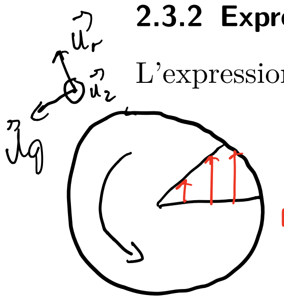
2.3.1 Expression de rotationnel en coordonnées cartésiennes

L'expression du rotationnel d'un champ vectoriel $\vec{A}(x,y,z,t)$, dans la base $(\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ est :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}(x,y,z,t)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial A_z}{\partial y}-\dfrac{\partial A_y}{\partial z}\\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z}-\dfrac{\partial A_z}{\partial x}\\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x}-\dfrac{\partial A_x}{\partial y}\end{pmatrix}.$$

2.3.2 Expression de rotationnel en coordonnées cylindriques

L'expression du rotationnel d'un champ vectoriel $\vec{A}(r,\theta,z,t)$, dans la base $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$ est :



$\vec{V} = r\omega\vec{u}_\theta$

$\omega = cste$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}(r,\theta,z,t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial\theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_r}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial A_r}{\partial\theta}\right) \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r^2\omega)}{\partial r}\vec{u}_z$$

$$= \underbrace{2\omega\vec{u}_z}_{\overrightarrow{cste}}$$

2.3.3 Expression de rotationnel en coordonnées sphériques

L'expression du rotationnel d'un champ vectoriel $\vec{A}(r,\theta,\varphi,t)$, dans la base $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$ est :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}(r,\theta,\varphi,t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r\sin\theta}\left(\dfrac{\partial(A_\varphi\sin\theta)}{\partial\theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial z}\right) \\ \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \dfrac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right) \\ \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial(rA_\theta)}{\partial x} - \dfrac{\partial A_r}{\partial\theta}\right) \end{pmatrix}.$$

2.4 Opérateurs laplaciens

Définition :
On définit le laplacien ΔV du champ scalaire $V(M,t)$ par l'expression :

$$\Delta V = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}V).$$

C'est un scalaire.

2.4.1 Expression du laplacien scalaire en coordonnées cartésiennes

En coordonnées cartésiennes, le laplacien scalaire agissant sur le champ $V(x,y,z,t)$ prend la forme :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

2.4.2 Expression du laplacien scalaire en coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques, le laplacien scalaire agissant sur le champ $V(r,\theta,z,t)$ prend la forme :

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

2.4.3 Expression du laplacien scalaire en coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques, le laplacien scalaire agissant sur le champ $V(r, \theta, \varphi, t)$ prend la forme :

$$\Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \mathrm{sin}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathrm{sin}\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \mathrm{sin}}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

2.4.4 L'opérateur laplacien vectoriel

Définition :
On définit le laplacien vectoriel $\vec{\Delta}\vec{A}$ du champ vectoriel $\vec{A}(M, t)$ par l'expression :

$$\vec{\Delta}\vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\vec{A}) - \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}).$$

C'est un vecteur. Il arrivera d'omettre la flèche sur Δ, *i.e.* écrire $\Delta\vec{A}$. L'aspect vectoriel de l'opérateur n'est pas ambigu vu qu'il est appliqué à un champ de vecteur.

En coordonnées cartésiennes, cet opérateur revient à appliquer le laplacien scalaire sur chaque composante du vecteur $\vec{A}$:

$$\vec{\Delta}\vec{A} = \Delta\vec{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix}.$$

3 Relations utiles d'opérateurs

Les relations suivantes ne sont pas à connaître par cœur, mais sont utiles.

3.1 Application d'opérateurs à un produit de champs

Soient U et V des champs scalaires et $\vec{A}$ et $\vec{B}$ des champs vectoriels.

- $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(UV) = V\overrightarrow{\mathrm{grad}}U + U\overrightarrow{\mathrm{grad}}V$;
- $\mathrm{div}(V\vec{A}) = \vec{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}V + V\mathrm{div}\vec{A}$;
- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(V\vec{A}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}V \wedge \vec{A} + V\overrightarrow{\mathrm{rot}}A$;
- $\mathrm{div}(A \wedge B) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}$;

3.2 Combinaisons d'opérateurs nulles en tout point

Pour tout champ vectoriel $\vec{A}$, l'analyse vectorielle permet de démontrer que :

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}) = 0.$$

On exploite cette relation pour dire que si un champ vectoriel $\vec{B}$ a une divergence nulle en tout point, alors il existe un champ vectoriel $\vec{A}$ tel que $\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}$.

M.Φ. $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ → potentiel vectoriel $\vec{A}$

Pour tout champ scalaire V, l'analyse vectorielle permet de démontrer que :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}V) = \vec{0}.$$

On exploite cette relation pour dire que si un champ vectoriel $\vec{A}$ a un rotationnel nul en tout point, alors il existe un champ scalaire V tel que $\vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}V$.

En régime stationnaire, M.F. $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = \vec{0}$ → potentiel électrostatique V tel que $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}V$