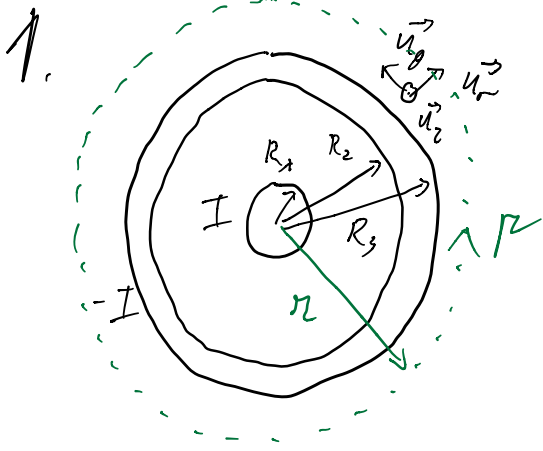


Ex. 1 : Le câble coaxial



Invariances : toute rotation autour de \vec{u}_z
 toute translation selon \vec{u}_z
 $\rightarrow \vec{B}(r, \theta, z)$

Symétries : tout plan contenant l'axe (Oz) est plan de symétrie des courants
 $\rightarrow \vec{B} \parallel \vec{u}_\theta$

Donc $\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta$, les lignes de champ sont des cercles concentriques autour de l'axe du cylindre.

2. Théorème d'Ampère appliqué à Γ , un cercle de rayon $r > R_3$:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \text{c}$$

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I_{\text{enc}} \text{c}$$

Si $r > R_3$, $I_{\text{enc}} \text{c} = I - I = 0 \rightarrow \boxed{B(r) = 0}$

Simple fil : $B(r) > 0 \rightarrow$ champ magnétique parasite rayonné
 Ce n'est pas le cas avec le câble coaxial.

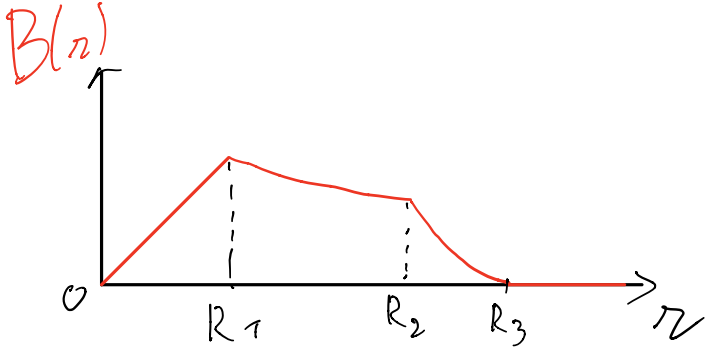
3. Par définition, $I_1 = j_1 \pi R_1^2$ et $I_2 = j_2 \pi (R_3^2 - R_2^2)$
 donc $\vec{j}_1 = \frac{I}{\pi R_1^2} \vec{u}_z$ et $\vec{j}_2 = \frac{-I}{\pi (R_3^2 - R_2^2)} \vec{u}_z$

4. Théorème d'Ampère appliqué à Γ pour :

- $r < R_1$ $I_{\text{enc}} \text{c} = j_1 \pi r^2 \rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 r j_1}{2}$

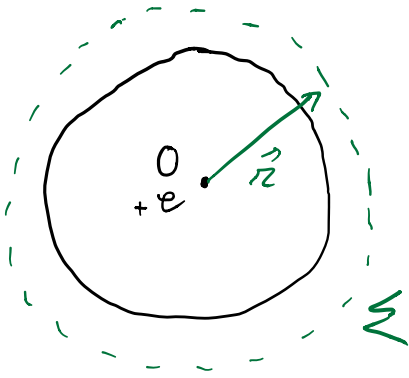
- $R_1 < r < R_2$ $I_{\text{enc}} \text{c} = I \rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 j_1 R_1^2}{2r}$

- $R_2 < r < R_3$ $I_{\text{enc}} = j_1 \pi R_1^2 - j_2 \pi (r^2 - R_2^2)$
 $\rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 j_1 R_1^2}{2r} - \frac{\mu_0 j_2 (r^2 - R_2^2)}{2r}$



Ex 2 : Modèle de l'atome d'hydrogène

1.



Invariances : toute rotation de l'atome

$$\rightarrow E(r, \theta, \varphi)$$

Symétrie : tout plan contenant O est plan de symétrie de charges

$$\rightarrow \vec{E} \parallel \vec{u}_r$$

Donc $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$

$$\vec{E} = -\text{grad} V = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \frac{\exp\left(-\frac{r}{a}\right)}{r^2} \vec{u}_r$$

2. $E(r) \xrightarrow{r \gg a} 0$ (Normal car l'atome est globalement neutre)

$V(r) \xrightarrow{r \gg a} 0$

$E(r) \xrightarrow{r \ll a} +\infty$ (Grande répulsion noyau - électron)

$V(r) \xrightarrow{r \ll a} +\infty$

3 Théorème de Gauss appliqué à la sphère S de

rayon r): $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q(r)}{\epsilon_0}$

$$E(r) \times 4\pi r^2 = \frac{q(r)}{\epsilon_0}$$

donc $q(r) = e \left(1 + \frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$

4. $E_r \neq 0$ $q(0) = e$ charge du noyau (contient un proton)

$q \xrightarrow{r \gg a} 0$ l'atome est globalement neutre. La charge $-e$ est répartie dans tout l'espace. L'électron est delocalisé.

5. Entre 2 sphères de rayons r et $r+dr$, la différence de charge intérieure est $dq = q(r+dr) - q(r) = 4\pi r^2 \rho(r) dr$

donc $\rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dq}{dr}$

$\rho(r) = \frac{-e}{4\pi a^2 r} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$

6. $dq = -e P(r) dr$ et $dq = \rho \times 4\pi r^2 dr$

d'où $P(r) = \frac{r}{a^2} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$

On a $P(0) = 0$ $P \xrightarrow{r \gg a} 0$

$$\frac{dP}{dr} = \frac{P(r)}{r} - \frac{P(r)}{a}$$

r	0	a	$+\infty$
-----	-----	-----	-----------

P est maximal en a

$\frac{dP}{dr}$	0	+	0	-
P	0	→ P(a)		0

a peut être interprété
comme le rayon de
l'atome: le rayon de Bohr
 $a \approx 52 \text{ pm}$

Ex 3: Insuffisance du théorème d'Ampère magnétostatique
en régime variable.

1. Comme en électrostatique $\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{entre les armatures} \\ 0 & \text{à l'extérieur} \end{cases}$

2. Théorème d'Ampère appliqué à S_1 :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i(t) \neq 0 \quad \leftarrow$$

Théorème d'Ampère appliqué à S_2 : contradiction!

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \times 0 = 0 \quad \leftarrow$$

3. A travers S_1 , $\Phi_e = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$

$$S_2, \quad \Phi_e = \iint_{S_{\text{int}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_{\text{ext}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sigma(t) S}{\epsilon_0} = \frac{Q(t)}{\epsilon_0}$$

4. En électrocinétique, on sait que $i = \frac{dQ}{dt}$

$$\text{donc } i(t) = \epsilon_0 \frac{d\Phi_e(S_2)}{dt}$$

5. Théorème d'Ampère généralisé:

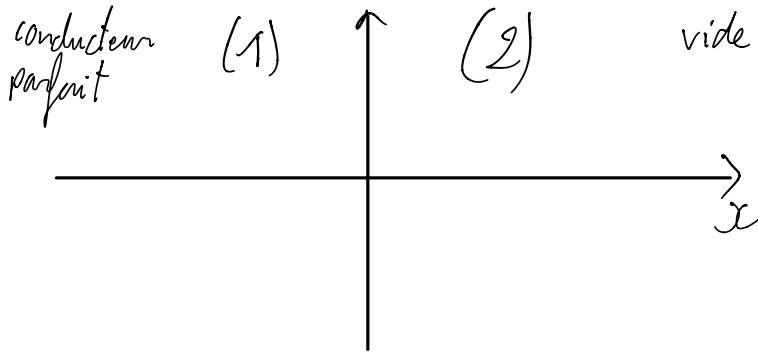
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I(t) + \underbrace{\mu_0 \epsilon_0 \iint \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}}_{\frac{d\phi_e}{dt}}$$

Sur S_1 , $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i(t) + 0$

Sur S_2 , $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 + \mu_0 i(t)$

} cohérent

Ex 4: Ondes électromagnétiques dans un conducteur parfait



1. En $x < 0$, $p_v = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2$ avec loi d'Ohm
 donc $E^2 = \frac{p_v}{\gamma}$

dans un conducteur parfait $\gamma \rightarrow +\infty$. La puissance dissipée par effet Joule ne peut pas être infinie. Nécessairement $E(x < 0) = 0$

2. Equation de M.G. $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

En $x < 0$, $\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \rho = 0$

or $\vec{j} = \rho \vec{v}$ donc $\vec{j} = 0$

Equation de M.F. $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\vec{B} = \text{cte}$

Si B est variable et cste alors $\dot{B} \neq 0$

$$\left. \begin{aligned} 3. \quad \vec{E}_2 - \vec{E}_1 &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{B}_2 - \vec{B}_1 &= \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \end{aligned} \right\} \text{ si } \vec{E}_2, \vec{B}_2 \text{ sont } \neq 0, \text{ il existe } \sigma \text{ et } \vec{j} \text{ non nuls aussi.}$$

4. Si $\vec{j} = 0$ et $\sigma = 0$ alors $\vec{B}_2 = 0$ et $\vec{E}_2 = 0$

Ex 5: Champs électrique et magnétique à l'intérieur d'un solénoïde.

1. M.F. $\vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 n \frac{di}{dt} \vec{e}_z \neq \vec{0}$ donc $\vec{E} \neq \vec{0}$

2. On a $\vec{E} = E(r,t) \vec{e}_\theta$
donc $\vec{\text{rot}} \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rE)}{\partial r} \vec{e}_z$

En $r < R$, $\frac{1}{r} \frac{\partial(rE)}{\partial r} = -\mu_0 n \frac{di}{dt}$
 $= \mu_0 n I_0 \omega \sin \omega t$

après intégration $rE = \frac{r^2}{2} \mu_0 n I_0 \omega \sin \omega t + \frac{f(t)}{r}$

or en $r \rightarrow 0$, \vec{E} ne peut diverger donc $f(t) = 0$

donc $\vec{E} = \frac{r}{2} \mu_0 n I_0 \omega \sin \omega t \vec{e}_\theta$

En $r > R$, $\vec{B} = 0$ donc $\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$

$$\text{donc } \vec{E} = \frac{q(t)}{r}$$

Comme il n'y a pas de charges surfaciques, \vec{E} est continue en R

$$\text{donc } \frac{q(t)}{R} = \frac{R}{2} \mu_0 n I_0 \omega \sin \omega t$$

$$\text{et } q(t) = \frac{R^2}{2} \mu_0 n I_0 \omega \sin \omega t$$

$$\text{donc } \vec{E}(r > R) = \frac{R^2}{2r} \mu_0 n I_0 \omega \sin \omega t \vec{e}_\theta$$

$$3. \text{ On a } \vec{j} = \gamma \vec{E} \quad \text{donc } \vec{j}(r < R) = \gamma \frac{r}{2} \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) \vec{e}_\theta$$

4. Puissance dissipée par effet Joule : $p_v = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2$

$$\text{donc } p_v = \gamma \left(\frac{\mu_0 n I_0 \omega}{2} \right)^2 r^2 \sin^2 \omega t$$

$$\text{Sur le cylindre } P_v = \iiint_{\text{cylindre}} p_v dZ$$

$$= \iiint p_v r dr d\theta dz$$

$$= \gamma \left(\frac{\mu_0 n I_0 \omega}{2} \right)^2 \sin^2 \omega t \underbrace{\int_0^a r^3 dr}_{\frac{a^4}{4}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_0^h dz}_h$$

$$\text{donc } P_v = \gamma \left(\frac{\mu_0 n I_0 \omega}{2} \right)^2 \sin^2 \omega t \frac{a^4}{4} \times 2\pi h$$

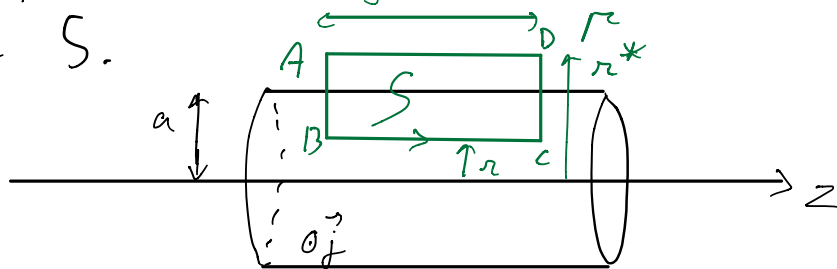
En moyenne sur une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\langle \sin^2 \omega t \rangle = 1/2$

$$\text{donc } \langle P_v \rangle = \gamma \left(\frac{\mu_0 n I_0 \omega}{2} \right)^2 \frac{\pi h a^4}{4}$$

5. Le courant induit dans le conducteur. Le champ électro-

magneétique cède de l'énergie au conducteur. Cette énergie est ensuite dissipée sous forme de chaleur. C'est l'effet Joule. On parle de chauffage par induction.

6. On définit le contour fermé Γ auquel s'appuie la surface S .



On applique le théorème d'Ampère généralisé à Γ :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \iint \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{l} \\ &= B(r < R) b \end{aligned}$$

$$\mu_0 I = \mu_0 \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 b \left(\frac{\gamma \mu_0 n I_0 \omega}{2} \right) \sin(\omega t) \underbrace{\int_r^a r' dr'}_{\frac{a^2 - r^2}{2}}$$

$$\begin{aligned} \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left(b \int_r^a \frac{r'}{2} \mu_0 n I_0 \omega \sin \omega t dr' \right) \\ &= \frac{\mu_0^2 \epsilon_0 b \omega^2}{2} \left(\frac{a^2 - r^2}{2} \right) n I_0 \cos \omega t \end{aligned}$$

Finalement $\vec{B}'(r < R) = \mu_0 \frac{n I_0 \omega}{2} \left(\frac{a^2 - r^2}{2} \right) (\gamma \sin \omega t + \epsilon_0 \omega \cos \omega t) \vec{e}_z$

Remarque $\frac{\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}{\mu_0 \vec{j}} \sim \frac{\epsilon_0 \omega E}{\gamma E} \sim 8,85 \cdot 10^{-19} \omega$

Ainsi si $\omega \ll 10^{18} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, on peut supposer $\frac{\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}{\mu_0 \vec{j}} \ll 1$
(ARQS)

7. On compare $\frac{B'}{B} = \mu_0 \gamma \omega \left(\frac{a^2 - r^2}{4} \right)$

8. Il faut $B' \ll B$. On se place en $r=0$, où B est max.
 $\frac{B'}{B} \ll 1 \Leftrightarrow \omega \ll \frac{4}{\mu_0 \gamma a^2} = \omega_c$

Pour un métal typiquement $\gamma \approx 10^7 \text{ S/m}$. Prenons $a = 1 \text{ cm}$
alors $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = 506 \text{ Hz}$

La relation n'est donc valable qu'à très basse fréquence.

Ex 5 Emission radioactive

1. $q(0) = 0$ "initialement neutre"

$q \xrightarrow{t \rightarrow \infty} q_0$ la charge finale de la masse une fois que toutes les particules ont été émises.

2. A l'instant t , les charges émises en O ont parcouru au plus la distance $v_0 t$. En $r > v_0 t$, il n'y a pas encore de charges donc $\rho(r, t) = 0$. Les charges qui arrivent en $r < v_0 t$ à l'instant t ont mis la durée r/v_0 pour atteindre le point considéré, elles ont

donc été émises à l'instant $t - \frac{r}{v_0}$. La charge $Q(r, t)$ comprise, à l'instant t , à l'intérieur de la sphère de rayon r est donc égale à la charge présente en O à l'instant $t - \frac{r}{v_0}$.

$$\text{Il vient } \underline{Q(r, t) = q\left(t - \frac{r}{v_0}\right)} \quad \forall r < v_0 t$$

$$\forall r > v_0 t \quad \underline{Q(r, t) = 0}$$

3. On applique le théorème de Gauss à la sphère centrée en O et de rayon r . $\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q(r, t)}{\epsilon_0}$

$\vec{E} = \vec{E}(r, t) \vec{u}_r$ vu les symétries et invariances du problème.

$$\text{donc } \underline{\vec{E} = \frac{Q(r, t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r}$$

4. La charge comprise entre les sphères de rayons $r+dr$ et r est $dQ = Q(r+dr, t) - Q(r, t) = \frac{\partial Q}{\partial r} dr = 4\pi r^2 dr \rho(r, t)$

$$\text{donc } \underline{\rho(r, t) = \frac{q_0}{4\pi r^2 \gamma v_0} \exp\left(-\frac{r}{Z} \left(t - \frac{r}{v_0}\right)\right)}$$

$$\text{et } \underline{\vec{j} = \rho \vec{v}_0}$$

5. Si $\vec{B} = 0$, on vérifie M.F. $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$
 et M.A. $\text{rot } \vec{B} = 0$ ok car $\vec{j} = -\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ avec les questions précédentes.

Remarque: On peut dire que $\vec{B} = \vec{0}$ vu la symétrie sphérique du système.

$\vec{0}$

6. On en déduit $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \vec{0}$

7. $u_{em} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{q(t - \frac{r}{v_0})}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2$

8. Puissance cédée : $P_V = \vec{j} \cdot \vec{E}$
 $= \frac{q^2 r^2}{(4\pi r^2)^2 \epsilon_0} \exp\left(-\frac{1}{c} \left(t - \frac{r}{v_0}\right)\right) \left(\exp\left(-\frac{t - r/v_0}{c}\right) - 1\right)$

9. On remarque que $\frac{\delta u_{em}}{\delta t} + \text{div} \vec{\Pi} = -P_V$

La conservation d'énergie est vérifiée.

Ex 6 : Sphère supraconductrice

1. En régime stationnaire : $\begin{cases} \text{div} \vec{B} = 0 \\ \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \vec{0} \end{cases}$

Dans la sphère $\vec{B} = \vec{0}$. Loin de la sphère $\vec{B} = B \vec{e}_\theta$

Il y a une discontinuité surfacique : $\vec{B}(R^+) - \vec{B}(R^-) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_r$

2. $\text{rot} \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \exists \psi$ tel que $\vec{B} = \text{grad} \psi$

Or $\text{div} \vec{B} = \vec{0}$ donc $\text{div}(\text{grad} \psi) = 0 \Leftrightarrow \underline{\Delta \psi = 0}$

3. $\psi(r, \theta) = R(r) \cos \theta$

$\Delta \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \psi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}$ *invariante*

$$= \frac{\cos \theta}{r} \frac{d^2(rR(r))}{dr^2} + \frac{R(r)}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (-\sin^2 \theta)$$

$$= \frac{\cos \theta}{r} \frac{d^2(rR(r))}{dr^2} - 2 \frac{R(r)}{r^2 \sin \theta} \sin \theta \cos \theta$$

donc $\Delta \psi = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos \theta}{r} \left(\frac{d^2(rR(r))}{dr^2} - 2 \frac{R(r)}{r} \right) = 0$
 vrai $\forall \theta$

Finalement $2 \frac{dR}{dr} + \frac{d^2 R}{dr^2} r - 2 \frac{R}{r} = 0$

On cherche $R(r) = \sum_n \alpha_n r^n$

donc $\frac{dR}{dr} = \sum_n n \alpha_n r^{n-1}$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} = \sum_n n(n-1) \alpha_n r^{n-2}$$

En remplaçant dans l'équation différentielle

$$2n \alpha_n r^{n-1} + n(n-1) \alpha_n r^{n-1} - \alpha_n r^{n-1} = 0$$

ie $2n-1 + n(n-1) = 0$

les 2 solutions sont $n = n_1 = 1$

$n = n_2 = -2$

d'où $R(r) = \alpha_1 r + \frac{\alpha_2}{r^2}$

et $\psi(r, \theta) = \left(\alpha_1 r + \frac{\alpha_2}{r^2} \right) \cos \theta$

4. On en déduit $\vec{B} = -\vec{\text{grad}} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$

$$\vec{B} = \left(\alpha_1 - \frac{2\alpha_2}{r^3} \right) \cos \theta \vec{e}_r - \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{r^3} \right) \sin \theta \vec{e}_\theta$$

On détermine α_1 et α_2 avec les conditions aux limites

$$B \xrightarrow{r \rightarrow \infty} B_0 \vec{e}_z = B_0 \cos \theta \vec{e}_r + B_0 \sin \theta \vec{e}_\theta$$

donc $\alpha_1 = B_0$

et $\vec{B}_{\text{ext}}(R^+) - \vec{e}_r = 0$ donc $(\alpha_1 - 2 \frac{\alpha_2}{R^3}) \cos \theta = 0 \quad \forall \theta$

donc $\alpha_2 = \frac{B_0 R^3}{2}$

Finalement $\vec{B}_{\text{ext}} = \left(B_0 - \frac{2 B_0 R^3}{2 r^3} \right) \cos \theta \vec{e}_r - \frac{1}{r} \left(B_0 r + \frac{B_0 R^3}{2 r^2} \right) \sin \theta \vec{e}_\theta$

or $\vec{B}_{\text{ext}}(R^+) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_r$

$$= \mu_0 (j_{s\theta} \vec{e}_\theta + j_{s\varphi} \vec{e}_\varphi) \wedge \vec{e}_r$$

$$= \mu_0 j_{s\varphi} \vec{e}_\theta - \mu_0 j_{s\theta} \vec{e}_\varphi$$

On identifie $j_{s\varphi} = -\frac{B_0}{\mu_0} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right) \sin \theta$

$$j_{s\theta} = 0$$

donc $\vec{j}_s = -\frac{3}{2} \frac{B_0}{\mu_0} \sin \theta \vec{e}_\theta$