Ex 5 $\quad \tau = (1,2) \quad \gamma = (1\ 2\ \dots\ n)$.

Calculer $\gamma^k \tau \gamma^{-k}$ pour $k \in [\![0, n-2]\!]$.

On suppose que $\tau = (a_1 \quad a_p)$ et γ une permutation quelconque.

$$\gamma \tau \gamma^{-1} = (\gamma(a_1) \qquad \gamma(a_p)) \overset{?}{=} \tau'$$

car : $\forall a_i \quad i \in [\![1, p]\!]$,

$$\gamma \tau \gamma^{-1}(\underline{\gamma(a_i)}) = \gamma \tau (a_i) \begin{cases} = \gamma(\underline{a_{i+1}}) & \text{si } i+1 \leq p \\ = \gamma(a_1) & \text{si } i = p \end{cases}$$

donc $\forall a_i \quad \gamma \tau \gamma (\gamma(a_i)) = \tau'(\gamma(a_i))$.

Si $l \neq \gamma(a_1), \dots, \gamma(a_p)$; $\gamma^{-1}(l) \neq a_1 \dots a_l$;

$\gamma \tau \underline{\gamma^{-1}(l)} = \gamma(\gamma^{-1}(l)) = l = \tau^{-1}(l)$;

Donc $\gamma \tau \gamma^{-1} = (\gamma(a_1), \dots, \gamma(a_p))$;

Regardons la question 1) ; $\tau = (1\,2)$

$\gamma = (1 \dots n)$.

On vient de montrer que :

$\gamma^k \circ \tau \circ \gamma^{-k} = (\gamma^k(1), \gamma^k(2))$

$\forall k \in \mathbb{N}$.

si $k \in [\![0, n-2]\!]$: $\quad \gamma^k(1) = k+1$

$\gamma^k(2) = k+2$:

$$\gamma^k \circ \tau \circ \gamma^{-k} = (k+1, k+2)$$

2) Soit (i, j) une transposition :

Si $j = i+1$ $\qquad (i, j) = (i, i+1)$

Si $j \geq i+2$ $\qquad (i, j) = \underbrace{(i, i+1)}_{\gamma} (i+1, j) \underbrace{(i, i+1)}_{\gamma^{-1}}$

On recommence tant que $j \geq i+2$ et à la fin, on obtient que

$(i\,j)$ s'écrit comme un produit de transpositions $(k, k+1)$.

3) Démontrer que S_n est engendré par σ et τ : $\forall \alpha \in S_n$, α s'écrit comme un produit de σ et τ

$$\alpha = \sigma \circ \tau \circ \sigma \circ \sigma \circ \tau \ldots$$

On sait que toute permutation s'écrit comme un produit de transpositions.

Toute transposition s'écrit d'après 2) comme un produit de transpositions de la forme $(k \ k+1)$ $k \in [\![1, n-1]\!]$

D'après 1) $\gamma^{k} \circ \tau \circ \gamma^{-k} = (k+1 \ k+2)$ si $k \in [\![0, n-2]\!]$.

Donc on a que toute permutation s'écrit comme un produit de γ et de τ.

Ex 6

Groupes ?

1) $(\mathbb{R}, \perp)$ $\quad x \perp y = x + y - 1$

i) la loi commutative :

$x \perp y = x + y - 1 = y \perp x$

ii) On cherche e tel que : $\forall y \in \mathbb{R}$

$e \perp y = e + y - 1 = y$

on choisit $e = 1$: existence d'un élément neutre

iii) associativité : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$(x \perp y) \perp z = (x + y - 1) \perp z$

$= x + y + z - 2$

$= x \perp (y \perp z)$.

iv) Soit $x \in \mathbb{R}$, on cherche $y \in \mathbb{R}$ tel que $x \perp y = e = 1$.

$x + y - 1 = 1 \Rightarrow y = 2 - x$.

On a montré l'existence du symétrique.

Conclusion : $(\mathbb{R}, \perp)$ est un groupe.

2) $(\mathbb{R}, T)$ $\quad x T y = x + xy + y$;

Si e est l'élément neutre ; $\underline{\forall x \in \mathbb{R}}$

$$x T e = \cancel{x} + xe + e = \cancel{x} ;$$

$$xe + e = 0 ; \Rightarrow e = 0$$

donc $e = 0$ est l'élément neutre.

Existence de l'inverse : $\forall x \in \mathbb{R}$;

On cherche y tel que :

$$x T y = x + xy + y = 0$$

$\Leftrightarrow (1+x)y = -x$ *

$\Leftrightarrow y = \dfrac{-x}{1+x}$, si $1+x \neq 0$

si $x = -1$ (*) $\Rightarrow 0 = 1$ impossible

D'où -1 n'a pas d'inverse et $(\mathbb{R}, T)$ n'est pas un groupe.

---

3) $(\mathbb{C}, \Delta)$ $\quad z = x+iy \quad z' = x'+iy'$

$z \Delta z' = xx' + i(xy' + x'y)$

i) $z \Delta z' = z' \Delta z$

ii) Leng : associative

iii) e l'élément neutre : $\forall z \in \mathbb{C}$
$e = a + ib$

$$z \Delta e = xa + i(xb + ay) = x + iy$$

donc $a = 1$ et $b = 0$ d'où $e = 1$.

iv) $z = 0 + iy$ et on cherche $z' = x' + iy'$
tel que $z \Delta z' = 0 + i x' y = 1$.
donc pas de solution : il n'y a pas d'inverse. $(\mathbb{C}, \Delta)$ n'est pas un groupe.

Exercice 7 $H \subsetneq G$ H sous-groupe.

$\overline{H}$ est-il un sous-groupe de G ?

On sait que e l'élément neutre de G appartient à H et donc $e \notin \overline{H}$.

$\overline{H}$ n'est pas un sous-groupe.

Exercice 8. $(G, \cdot)$. loi associative qui possède un neutre à droite : $\forall x \in G \quad x.e = x$

et $\forall x \in G, \exists x' \quad x x' = e$.

Montrer que G est un groupe :

Il reste à vérifier : $\forall x \in G \quad e.x = x$

et

$\forall x \in G, \quad x'x = x x' = e$

Soit $x \in G$ et $\exists x'$ tq $x x' = e$

x' admet un inverse à droite y

$x'y = e \qquad x x' y = e y \Longrightarrow \underbrace{x . e} = e . y = x$

$e \cdot y = x \Rightarrow x'ey = \underline{x'x = e}$

D'où $xx' = x'x = e$.

$ex = \underbrace{xx'x} = xe = e$.

conclusion : e est un élément neutre.

$(G, \cdot)$ est un groupe.