Exercice 1 : $A_n \subset S_n$ $A_n = \{\sigma \in S_n, \varepsilon(\sigma) = 1\}$.

$\varepsilon : S_n \longrightarrow \{-1, 1\}$. $\varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \varepsilon(\sigma) \times \varepsilon(\sigma')$

ε est un morphisme de Groupes :

$(S_n, \circ) \longrightarrow (\{-1, 1\}, \times)$

τ transposition.

2) : $\varphi : S_n \longrightarrow S_n$

$\sigma \longmapsto \sigma \circ \tau$

$\varepsilon(\sigma) = (-1)^r$ où $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_r$

une décomposition en transposition.

φ est bijective car $\sigma \longmapsto \sigma \circ \tau$ est sa réciproque ; $\varphi \circ \varphi(\sigma) = \varphi(\sigma \circ \tau) = \sigma \circ \tau \circ \tau$

$= \sigma$.

$\varphi^{-1} = \varphi$.

Si $\gamma \in A_n$, par définition on a
$\gamma \circ \tau \in S_n \setminus A_n$ et réciproquement
Si $\gamma' \in S_n \setminus A_n$ $\qquad \gamma' \circ \tau \in A_n$

induit une bijection de A_n dans $S_n \setminus A_n$

et $S_n = A_n \underset{\text{disj.}}{\cup} S_n \setminus A_n$

$$\mathrm{card}(S_n) = \mathrm{card}\, A_n + \mathrm{card}(S_n \setminus A_n)$$
$$= 2\,\mathrm{card}\, A_n$$

Rappel : $\mathrm{card}\, S_n = n! \Rightarrow \boxed{\mathrm{card}\, A_n = \frac{n!}{2}}$

1) On me demande de lister tous éléments de A_n.

En fait, on étudie $S_n \setminus A_n$; $n=4$.

les transpositions ;

$(1\,2), (1\,3), (1\,4), (2,3), (2,4), (3,4)$ 6 élts

Les 4 cycles ;

$(1\,2\,3\,4), (1\,2\,4\,3), (1\,3\,2\,4), (1\,3\,4\,2), (1\,4\,2\,3), (1\,4\,3\,2)$

6 élts ; de $A \setminus A_n$; $(a_1\, a_2\, a_3\, a_4) = (a_3 a_4)\,(a_2\, a_3)\,(a_1\, a_2)$

Au total 12 éléments mais S_n a 24 éléments donc on a tous éléments de $S_n \setminus A_n$.

D'après 2) On compose par $(1\ 2)$ et on obtient de A_n.

Exercice 2

$$f : E^3 \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$(x, y, z) \longmapsto x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_1 + x_3 y_2 z_1 + x_1 y_3 z_2 + x_2 y_1 z_3.$$

1) Soit $i, j, k \in [\![1, 3]\!]$

$$\varphi_{i,j,k} : E^3 \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$(x, y, z) \longmapsto x_i y_j z_k$$

est linéaire en x, y et z car ce sont des homothéties. Une somme d'application trilinéaire est trilinéaire : φ trilinéaire ;

2) φ n'est pas antisymétrique ;

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = 1, \quad \varphi\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = 1 \neq -1.$$

φ n'est pas antisymétrique.

<u>Exercice 3</u>

$f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ linéaire

$p : E \longrightarrow E$ linéaire

$q : E \longrightarrow E$ linéaire

$$\varphi : \begin{array}{ccl} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x, y) & \longmapsto & f(p(x))\, f(q(y)) - f(p(y))\, f(q(x)) \end{array}$$

φ linéaire en x car composée d'applications linéaire. De même, linéaire en y.

$$\varphi(y, x) = f(p(y))\, f(q(x)) - f(p(x))\, f(q(y))$$
$$= -\varphi(x, y)$$ donc φ est anti-symétrique.

Exercice 4 $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$((a_{i,j}), (b_{i,j})) \longmapsto \operatorname{tr} {}^tAB$$

$$(c_{i,j}) = {}^tAB \qquad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}\, b_{k,j}$$

$$\operatorname{tr} {}^tAB = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1, k=1}^{n} a_{k,i}\, b_{k,i}$$

Remarque : $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ est le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

Si on identifie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^{n^2}$, φ est le produit scalaire canonique.

On a répondu à la question 1), 2) et 3) :

$$\|A\| = \left(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

4) $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leq n \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} \quad ??$$

$$\tilde{A} = (|a_{ij}|)_{(i,j)} \qquad B = (1)_{i,j}$$

Cauchy Schwarz $$\varphi(A, B) \leq \|\tilde{A}\| \times \|B\|$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} \times \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1}}_{=n}.$$

et donc, on a montré l'inégalité

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{On a égalité ssi } \exists \lambda \quad \tilde{A} = \lambda B \\ \forall i,j \quad |d_{i,j}| = \lambda \geq 0\end{array}}$$

---

5. Montrer que $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

On dit que $\| \ \|$ est multiplicative :

$(c_{i,j}) = A \times B \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

$$(c_{ij})^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right)^2 \underset{C-S}{\leq} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \times \sum_{k=1}^{n} b_{kj}^2$$

$$\|AB\|^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} c_{i,j}^2 \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \times \sum_{k=1}^{n} b_{kj}^2 \right)$$

$$= \left(\sum_{1 \leq i,k \leq n} a_{ik}^2 \right) \times \sum_{1 \leq j,k \leq n} b_{kj}^2$$

$$= \|A\|^2 \times \|B\|^2$$

5) est matrié.

Cas d'égalité ?

Exs 1) Montrer que $\| \ \| : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \|x\|$ est $\mathcal{C}^0$

car elle 1-lipschitzienne :

$$\boxed{\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x-y\|} \leq \|x\| + \|y\|$$

2) Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, f $\mathcal{C}^0$ et $\forall x, y \in E$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$

f linéaire : $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$

Il faut encore montrer que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

$f(0) = f(0) + f(0) \Rightarrow \underline{f(0) = 0}$

On fixe $x \in E$: $p \in \mathbb{N}$

$$f(px + x) = f(px) + f(x)$$

Par récurrence : $f(px) = p f(x)$

$\Rightarrow f(px - px) = 0$

$\Leftrightarrow f(-px) = -f(px)$

$\forall p \in \mathbb{Z}$

$f(px) = p f(x)$

$$\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \quad f\left(q \frac{p}{q} x\right) = f(px) = p f(x)$$

$$= q f\left(\frac{p}{q} x\right)$$

et donc $f\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p}{q} f(x)$.

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et donc si $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit $x_n = \frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q}$ tq $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \lambda$

$\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n x) = f(\lambda x)$ car f $\mathcal{C}^0$.

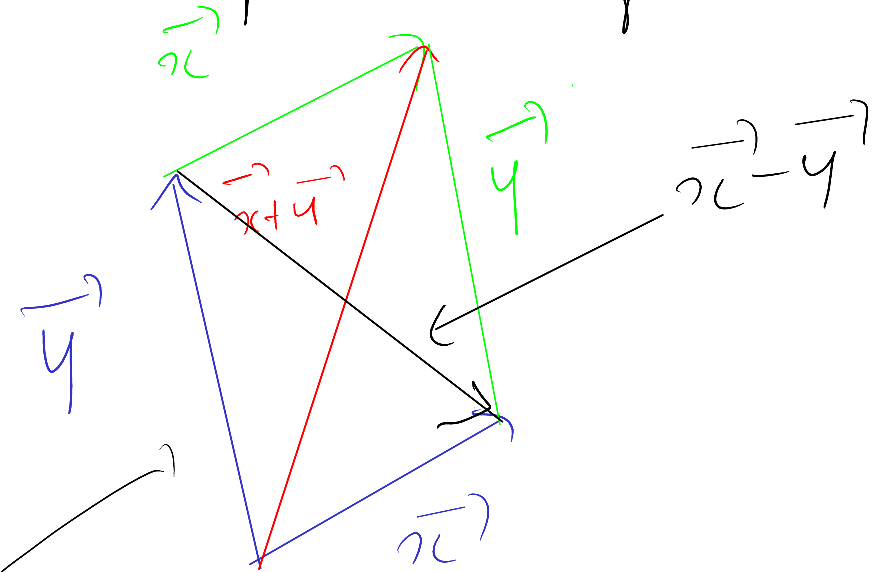
mais $\forall n$, $f(x_n x) = x_n f(x)$ donc

$$\lim f(x_n x) = \lambda f(x)$$

et f est linéaire.

3/ $\forall x, y \in E^2 \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

l'identité du parallélogramme : (*)



ceci est un parallélogramme :

si $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ on montre facilement que l'identité du parallélogramme est vraie.

On veut montrer la réciproque : Si $\| \; \|$ vérifie l'identité du parallélogramme, alors $\|x\| = \sqrt{\varphi(x,x)}$ avec

$$\varphi(x,y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$$

BUT !

3) ; Si $(*)$ est vraie

$\rightarrow$ φ est symétrique ; $\varphi(y,x) = \dfrac{\|x+y\|^2 - \|y-x\|^2}{4} = \varphi(x,y)$

$\rightarrow$ φ définie positive ; $\varphi(x,x) = \dfrac{\|x+x\|^2}{4} = \|x\| \geq 0$

et $\varphi(x,x) = 0$ ssi $\|x\| = 0$ car $\| \; \|$ est une norme

b) c) d) Montrons que φ est linéaire

On utilise la question 2) !

$$\varphi(x+y,z)+\varphi(x-y,z) = \frac{\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2}{4} + \frac{\|x-y+z\|^2 - \|x-y-z\|^2}{4}$$

$$= \frac{\|x+z\|^2 + \cancel{\|y\|^2}}{2} - \frac{\|x-z\|^2 + \cancel{\|y\|^2}}{2} = \frac{\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2}{2}$$

$$= 2\varphi(x,z).$$

c) : $x=y$ $\qquad \varphi(2x,z) + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\varphi(0,z)}} = 2\varphi(x,z)$

$$\varphi(x,z)+\varphi(y,z)=\varphi(x+y,z).$$

$\forall u,v,z$

$$\boxed{\varphi(u+v,z)+\varphi(u-v,z)=2\varphi(u,z)}$$

$$u=\frac{x+y}{2} \qquad v=\frac{x-y}{2}$$

$\Rightarrow$ le résultat est immédiat

car : $\underline{\varphi(x,z)+\varphi(y,z)}=2\varphi\left(\frac{x+y}{2},z\right)$

$$=\underline{\varphi(x+y,z)}$$

Pour utiliser la question c)

faut vérifier que φ est continue car

$$(x,y) \longmapsto \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$$

or $\| \ \|$ est continue donc φ aussi

Donc φ est linéaire en x

Mais φ est symétrique donc

φ est bilinéaire, symétrique définie positive!

On veut vérifier que

$$\|x\| = \sqrt{\varphi(x,x)} = \sqrt{\|x\|^2}$$

$$= \|x\|$$

donc $\| \ \|$ est la norme relative au produit scalaire φ.