Ex 1 E $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$, $f^2 = -id_E$

Montrer que n est pair.

On sait que $\det(f^2) = (\det f)^2 \geq 0$

et $\det(-id_E) = (-1)^n$ où $\dim E = n$

$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$

donc $(-1)^n \geq 0 \Rightarrow n$ est pair.

Si n est pair ; $n=2$ $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Si $n = 2p$ $p \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} = B$ $B^2 = -id$

Exercice 2. $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{K})$ ${}^tA = -A$

Montrer que $\det A = 0$

On sait que $\det {}^tA$ $\begin{cases} = \det A \text{ (cours)} \\ = \det(-A) = (-1)^{2n+1} \det A \end{cases}$

par hypothèse

Donc $\det A = -\det A \Rightarrow 2 \det A = 0$

Et si $1+1 = 2 \neq 0$, alors $\det A = 0$

$\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $\quad 1+1 = 0$.

Exercice 3 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A = (a_{i,j})$.

On pose $\bar{A} = (\overline{a_{ij}})$.

1) Montrons que $\det \bar{A} = \overline{\det A}$:

$$\overline{\det A} = \overline{\sum_{\gamma \in S_n} \varepsilon(\gamma)\, a_{1,\gamma(1)} \cdots a_{n,\gamma(n)}}$$

$$= \sum_{\gamma \in S_n} \varepsilon(\gamma)\, \overline{a_{1,\gamma(1)}} \cdots \overline{a_{n\gamma(n)}}$$

$$= \det \bar{A}.$$

2) On suppose que ${}^tA = \bar{A}$:

$$\det {}^tA \begin{cases} = \det A \text{ (cours)} \\ = \det \bar{A} = \overline{\det A} \text{ (hypothèse)} \end{cases} \implies \det A = \overline{\det A}$$

$\det A \in \mathbb{R}.$

Exercice 4 :

$$\det\begin{pmatrix}0 & a & b\\ a & 0 & c\\ b & c & 0\end{pmatrix} = 0 + abc + abc = 2abc.$$

$$\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$$

règle de Sarrus

$$= aei + dhc + bfg - gec - afh - dbc$$

$$\det\begin{pmatrix}a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix} = \boxed{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}$$

Sarrus

La forme est développée

Bien factorisée ! quand $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = 0$?

On peut montrer que :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \underset{C_1 + C_2 + C_3}{\begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix}} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}$$

$$= \boxed{\underline{(a+b+c)\left(a^2+c^2+b^2-ac-ab-bc\right)}}$$

$$\det \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}}_{J} = \det \begin{pmatrix} a+b+c & a+jb+j^2c & a+j^2b+jc \\ a+b+c & ja+j^2b+c & j^2a+jb+c \\ a+b+c & j^2a+b+jc & j\cdot a+b+j^2c \end{pmatrix}$$

$$= \det A \times \det J \quad = \det\left((a+b+c)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, (a+jb+j^2c)\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}, (a+j^2b+jc)\begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix}\right)$$

$$= (a+b+c)(a+jb+j^2c)(a+j^2b+jc) \times \det J$$

$$\Rightarrow \boxed{\det A = (a+b+c)(a+jb+j^2c)(a+j^2+jc)}$$

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = \det(v_a+v_b, v_b+v_c, v_a+v_c)$$

$$V_a = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \quad V_b = \begin{pmatrix} b \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} \quad V_b = \begin{pmatrix} c \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix}$$

det est 3-linéaire alternée.

$$= \det(v_a, v_b, v_c) + \det(v_b, v_c, v_a)$$

$$= 2\det(v_a, v_b, v_c).$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$\det {}^tA = \det A$

déterminant de Vandermond

$$= abc \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & C_2 - aC_1 & C_3 - aC_2 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b-a & b^2-ab \\ 1 & c-a & c^2-ac \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} b-a & b(b-a) \\ (c-a) & c(c-a) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

Donc $\boxed{\det A = 2abc\,(b-a)(c-a)(c-b)}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix}$$

Sarrus :

$$= \underline{\cos b \sin c} + \underline{\cos a \sin b} + \underline{\cos c \sin a} - \underline{\sin a \cos b} - \underline{\sin b \cos c} - \underline{\cos a \sin c}$$

$$= \sin(b-c) + \sin(b-a) + \sin(a-c)$$

forme développée

On cherche le déterminant sous forme factorisée :

$$\begin{array}{c} \\ \left| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{matrix} \right| \end{array} = \begin{array}{c} C_2 - C_1 \\ \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ \sin a & \cos b - \cos a & \cos c - \cos a \\ \cos a & \sin b - \sin a & \sin c - \sin a \end{matrix} \right| \end{array}$$

$$\left| \begin{matrix} \cos b - \cos a & \cos c - \cos a \\ \sin b - \sin a & \sin c - \sin a \end{matrix} \right| = -4 \sin \frac{b-a}{2} \sin \frac{c-a}{2} \sin \frac{b-c}{2}.$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

et

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}.$$

Exercice 5 1) $(X^2, (X+1)^2, (X+2)^2, (X+3)^2)$ est liée.

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$.

$$0 = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 (X+1)^2 + \lambda_3 (X+2)^2 + \lambda_4 (X+3)^2$$

La dimension de $\mathbb{R}_2[X]$ est 3.

Une famille à 4 éléments est liée.

2) $$D = \begin{vmatrix} a^2 & \cdots & d^2 \\ (a+1)^2 & \cdots & (d+1)^2 \\ (a+2)^2 & & (d+2)^2 \\ (a+3)^2 & \cdots & (d+3)^3 \end{vmatrix}$$

Soit $P = \begin{pmatrix} X \\ (X+1)^2 \\ (X+2)^2 \\ (X+3)^2 \end{pmatrix}$ $D = |P(a), P(b), P(c), P(d)|$

On a il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ non tous nuls tq.

$\forall x \in \mathbb{R}$ $0 = \lambda_1 x + \lambda_2 (x+1)^2 + \lambda_3 (x+2)^2 + \lambda_4 (x+3)^2$

Donc sur les lignes : $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 + \lambda_4 L_4 = 0$. (L_1, L_2, L_3, L_4) est liée

$D = 0$.

Exercice 6. $A = (C_1 | \quad | C_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

C_j j-ème vecteur colonne de A.

$$\det A = \det(C_1 | \qquad | C_n)$$

$$= \det(C_1 | C_2 - C_1 | C_3 - C_2 | \qquad | C_n - C_{n-1})$$

Mais $\det(C_1 - C_2 | C_2 - C_3 | \qquad | C_n - C_1) = 0$

car $C_1 - C_2 + C_2 - C_3 + \qquad + C_n - C_1 = 0$

$(C_1 - C_2, \qquad, C_n - C_1)$ est liée.

2) $c_j' = \sum_{i \neq j} c_i = \sum_{i=1}^{n} c_i - c_j$

$$= C - c_j$$

calculons $\det(c_1', \quad , c_n') =$

$\det(C - c_1, C - c_2, \qquad , C - c_n) =$

$(-1)^{n-1} \det(C, c_2, \quad , c_n) + \qquad + (-1)^{n-1} \det(c_1, \quad , c_{n-1}, C)$

$+ (-1)^n \det(c_1 \cdots c_n)$.

Remarque :

$$\det(c_1, \ldots, c_{k-1}, c, c_{k+1}, \ldots, c) = \det(c_1, \ldots, \underset{\underset{k}{\uparrow}}{\sum c_i}, \ldots, c_n)$$

$$= \det(c_1, \ldots, \underset{k}{c_k}, \ldots, c_n) = \det A$$

$$\det(N) = n \times (-1)^{n-1} \times \det A + (-1)^n \det A$$

$$= (-1)^{n-1} (n-1) \det A.$$

Exercice 7 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$

$$\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$
$$M \longmapsto AM$$

$\det \varphi_A = ?$

$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a une bas canonique $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

$$E_{i,j} = \begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} - i = (\delta_{i,k}\delta_{j,l})_{1 \leq k,l \leq n}$$

$$E_{i,j} E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$$

$$\varphi_A(E_{i,j}) = AE_{i,j} = \Big(\sum_{1\le k,l\le n} a_{k,l}E_{k,l}\Big)E_{i,j}$$

$$= \sum_{1\le k,l\le n} a_{k,l}E_{k,l}E_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j}$$

$$\varphi_A(E_{i,j}) = \begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} & a_{1,i} & \\ 0 & \vdots & 0 \\ & a_{n,i} & \end{pmatrix} \end{array}$$

Je fixe j et $(E_{1,j}, \quad , E_{n,j})$ libre

$$\begin{array}{c} \varphi_A(E_{i,j}) \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,i} & a_{n,1} \\ & & \\ a_{n,1} & a_{n,i} & a_{n,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} E_{1,j} \\ \\ E_{n,j} \end{array} = A$$

On prend la base $(E_{1,1} \quad E_{n,1}, E_{1,2}, \dots, E_{n,2}, \dots, E_{1,n}, \dots, E_{n,n}) = \mathcal{B}'$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_A) = \left(\begin{array}{c|c|c} A & 0 & 0 \\ \hline 0 & A & 0 \\ \hline 0 & & \ddots \quad 0 \\ & 0 & A \end{array}\right) \begin{array}{l} E_{1,1} \\ E_{n,1} \\ E_{1,2} \\ E_{n,2} \\ E_{1,n} \\ E_{n,n} \end{array}$$

On en déduit que $\det \varphi_A = (\det A)^n$.