$(U_i)_{i \in I} \in (\mathcal{T}(E))^I$

$\forall i \quad U_i \subset E$ et U_i ouvert

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i$$

Soit $x \in U$, alors $\exists i_0 \in I$ tq $x \in U_{i_0}$

U_{i_0} est un ouvert donc $\exists \varepsilon > 0$ tq $B(x, \varepsilon) \subset U_{i_0}$

Or $U_{i_0} \subset U$, donc $B(x, \varepsilon) \subset U$

La proposition est démontrée.

Une union quelconque d'ouverts est un ouvert.

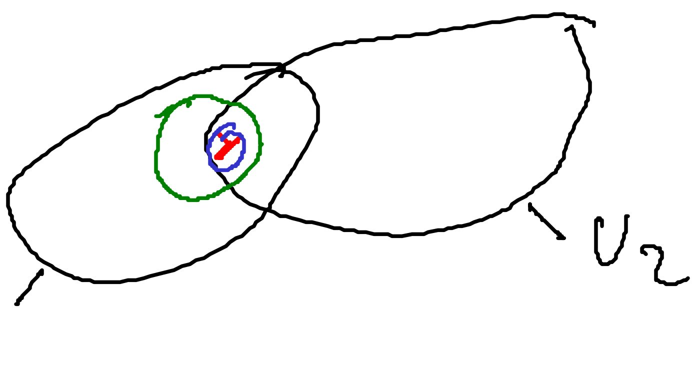
Si I est finie : on suppose $I = [\![1,p]\!]$.

$$V = \bigcap_{i=1}^{p} U_i$$

Soit $x \in V$, $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $x \in U_i$

Mais U_i est un ouvert, donc

$\exists\, \varepsilon_i > 0$ tq $B(x,\varepsilon_i) \subset U_i$.



Soit $\varepsilon = \min(\varepsilon_i, i \in [\![1,n]\!])$

et alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$

$B(x,\varepsilon) \subset B(x,\varepsilon_i) \subset U_i$

Donc $B(x,\varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^{p} U_i = V$

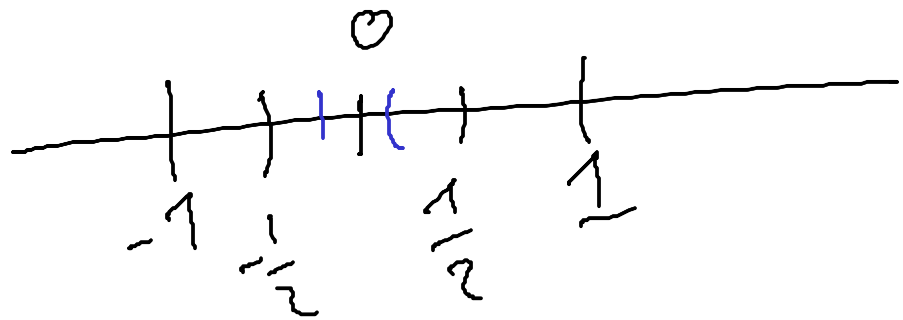
V est un ouvert | ⚠ comme I est fini : $\varepsilon > 0$

$\varepsilon = \varepsilon_{i_0}$

Attention : $V = \bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n} ; \frac{1}{n}\right[$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left]-\frac{1}{n} ; \frac{1}{n}\right[$ est un ouvert

$V = \{0\}$



$\{0\}$ n'est pas un ouvert : $\forall \varepsilon > 0$
$\frac{\varepsilon}{2} \in B(0, \varepsilon)$ et $\frac{\varepsilon}{2} \notin \{0\}$ donc
$B(0, \varepsilon) \not\subset \{0\}$.

Conclusion : une intersection quelconque d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert.

$E = E_1 \times E_2$

$U = U_1 \times U_2$ avec U_1 et U_2 ouverts.

Soit $x = (x_1, x_2) \in U_1 \times U_2$.

U_1 est un ouvert donc $\exists\, \varepsilon_1 > 0,\ B(x_1, \varepsilon_1) \subset U_1$

U_2 ——— $\exists\, \varepsilon_2 > 0,\ B(x_2, \varepsilon_2) \subset U_2$

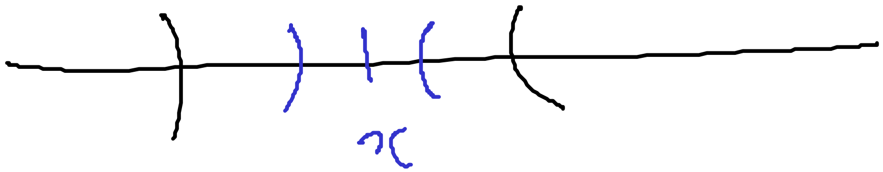
$\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$ et

$B(x, \varepsilon) = B(x_1, \varepsilon_1) \times B(x_2, \varepsilon_2) \subset U_1 \times U_2$

$U_1 \times U_2$ est un ouvert.

Exemple: $]1,2[\times]2,3[$ est ouvert car produit de deux ouverts.

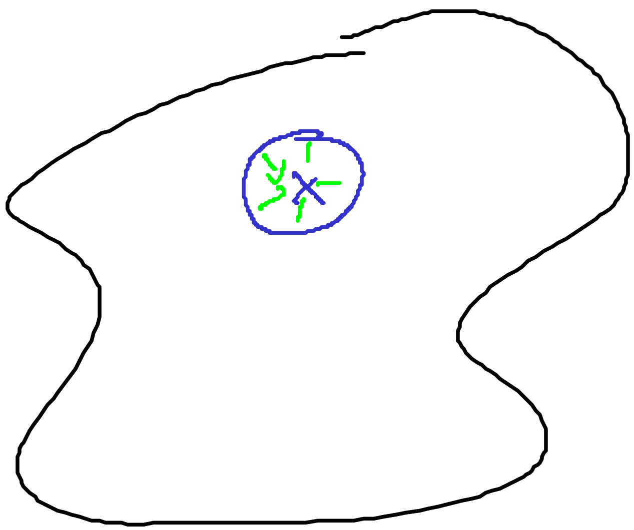
dans

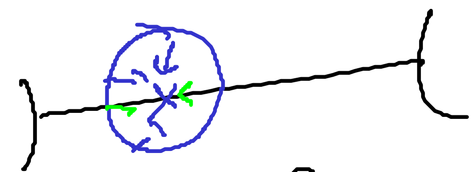


ouvert

dans $\mathbb{R}^2$

ouvert





ouvert ? NON

Si X est un ouvert et $a \in X$, $\exists \varepsilon > 0$, $B(a, \varepsilon) \subset X$ donc X est un voisinage de a.

Si $W=\emptyset$ $\quad E\setminus W = E$ ouvert.

donc $\emptyset$ est un fermé (et aussi un ouvert).

Si $W=E$ $\quad E\setminus W=\emptyset$ est un ouvert

$W=E$ est un fermé.

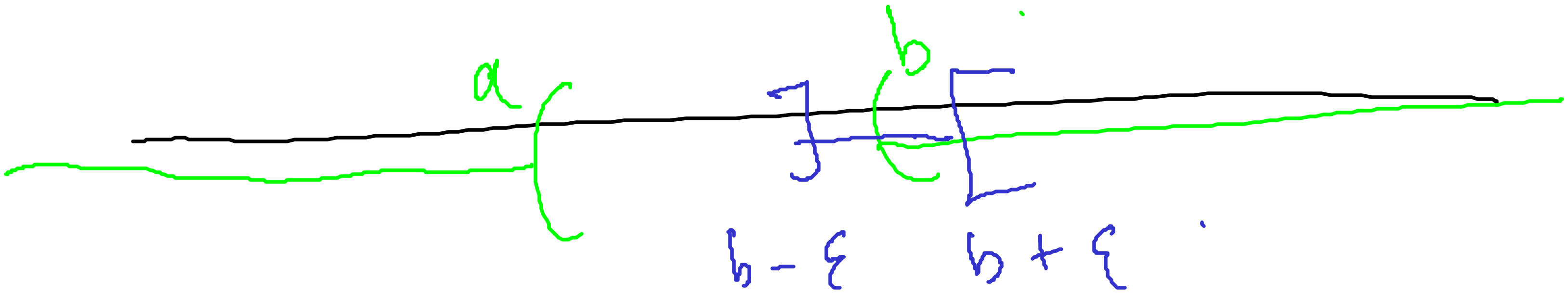
Si $W=[a,b]\subset\mathbb{R}$ $\quad \mathbb{R}\setminus W =]-\infty,a[\cup]b,+\infty[$

$\mathbb{R}\setminus W$ est un ouvert car union de deux ouvert.

Remarque : $[a,b[$ n'est pas un ouvert. Est-elle un fermé :

$\mathbb{R}\setminus[a,b[=]-\infty,a[\cup[b,+\infty[$

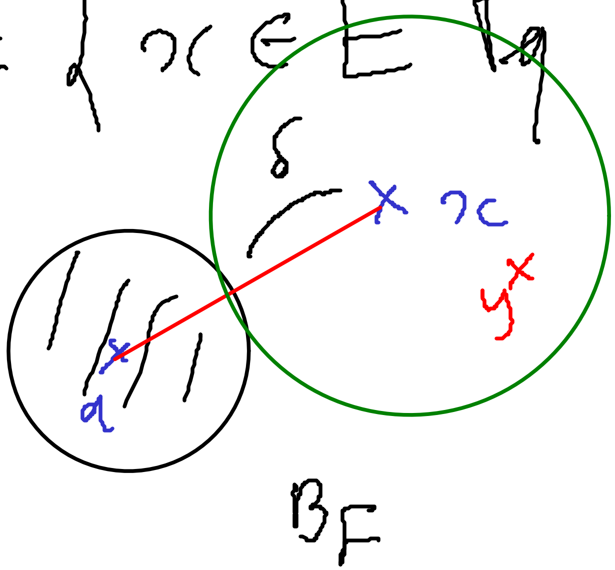
$\forall \varepsilon > 0 \qquad B(b, \varepsilon) \not\subset \mathbb{R} \setminus [a, b[$.



Il existe des parties qui ne sont ni ouvertes ni fermées.

Si $W = B_F(a, \varepsilon) = \{ x \in E \text{ tq } \|x - a\| \leq r \}$

$E \setminus W = \{ x \in E \text{ tq } \|x - a\| > r \}$.



$B(x, \delta) \subset E \setminus W$. But

avec $\delta = \|x - a\| - \varepsilon$.

$\forall y \in B(x,\delta) \quad \|y-x\| < \delta = \|x-a\| - \varepsilon$.

On montrer que $y \notin B(a,\varepsilon)$)

$$\|y-a\| \geq \big|\|x-a\| - \|y-x\|\big|$$

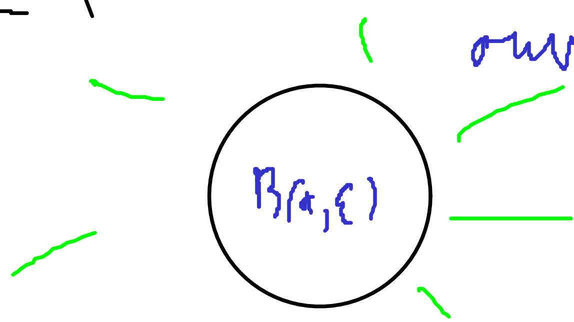
$$\geq \|x-a\| - \delta = \|x-a\| - (\|x-a\| - \varepsilon)$$

$$= \varepsilon. \quad \square$$

Donc $y \in E\setminus B(a,\varepsilon) \Rightarrow B(x,\delta) \subset E\setminus W$ $\square$.

Si $W = S(a,\varepsilon)$

$$E\setminus W = \underbrace{B(a,\varepsilon)}_{\text{ouvert}} \cup \underbrace{\left(E\setminus B_F(a,\varepsilon)\right)}_{\text{ouvert}} \text{ ouvert.}$$



$= E\setminus B_F(a,\varepsilon)$.

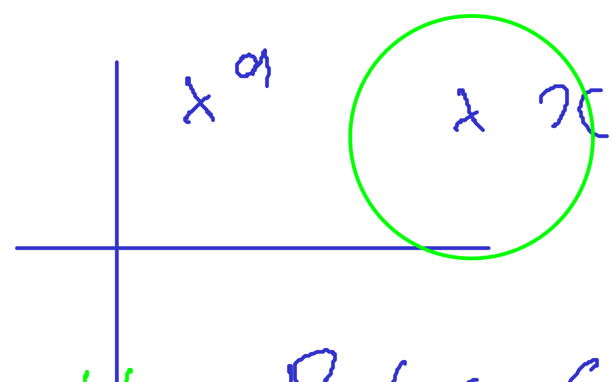
$W = \bigcap_{i \in I} W_i$ W_i fermés.

$W^c = E \setminus W = \bigcup_{i \in I} W_i^c$ W_i^c ouvert.

une union quelconque d'ouverts est un ouvert donc W^c ouvert

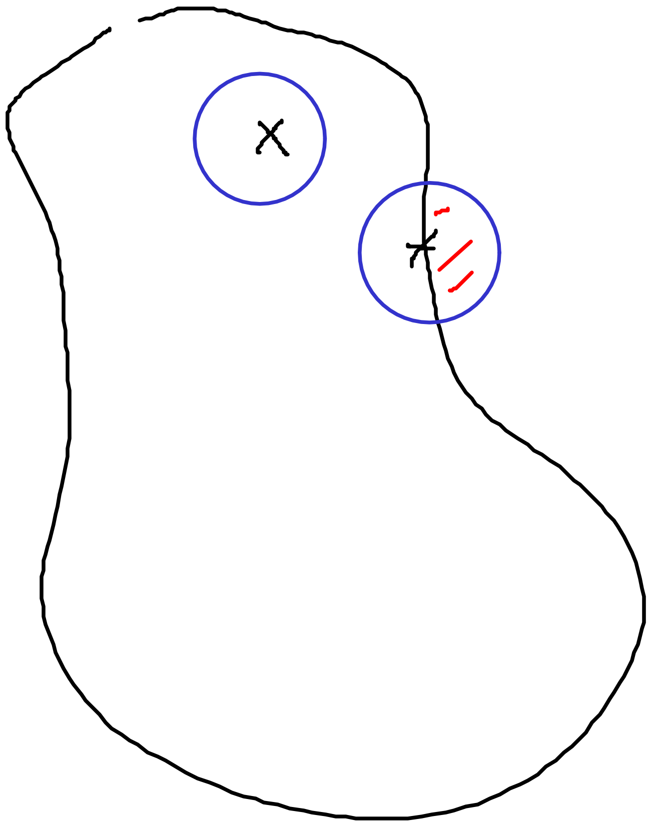
$\Rightarrow$ W est fermé.

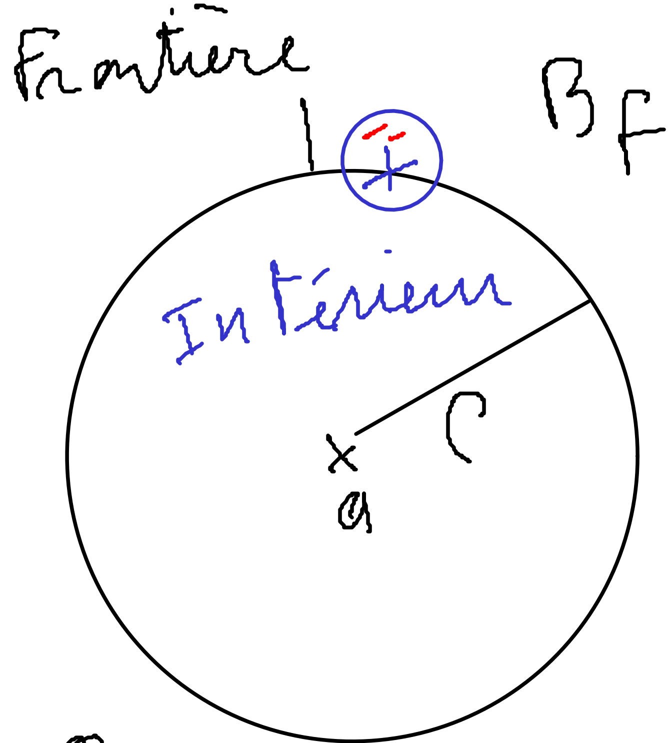
$V = E \setminus \{a\}$



Si $x \in V$, $\varepsilon = \|x - a\|$ $B(x, \varepsilon) \subset E \setminus \{a\}$

$E \setminus \{a\}$ est un ouvert et $\{a\}$ est fermé.



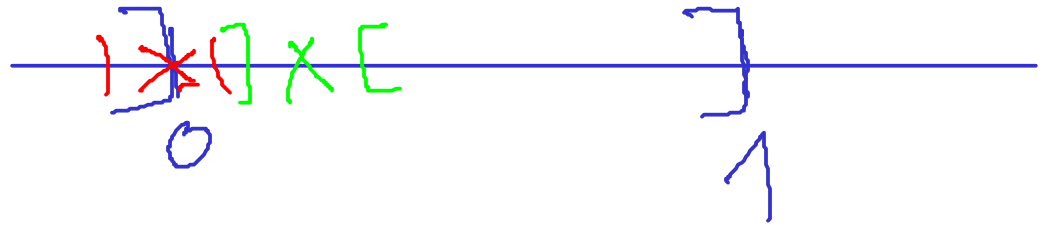


$$\mathring{B}_F(a,\rho) = B(a,\rho)$$

$$Fr(B_F(a,\rho)) = S(a,\rho)$$

$$B_F(a,\rho)$$

$]0,1] = X$



$\mathring{X} =]0,1[$

$\overline{X} = [0,1]$

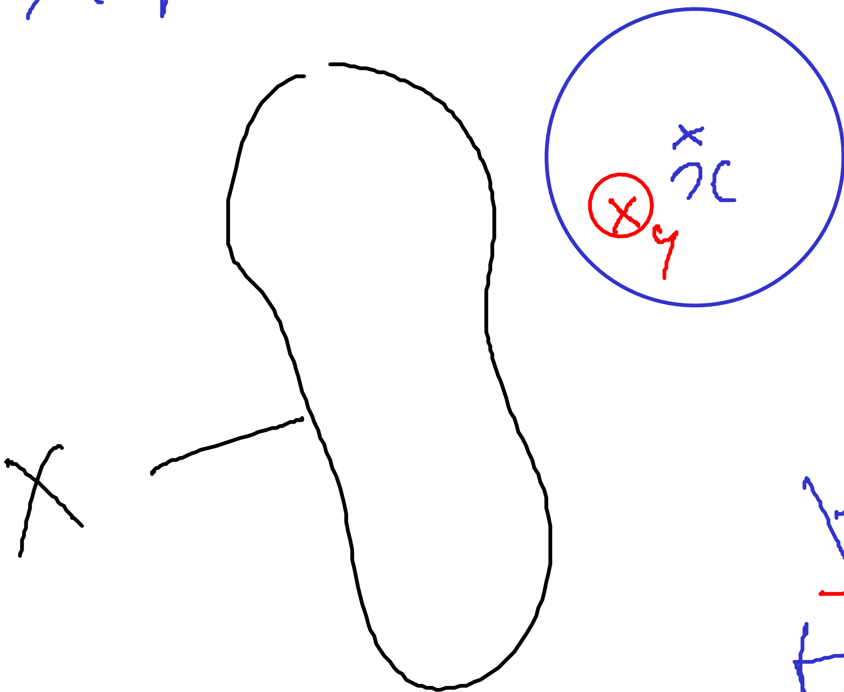
$Fr(X) = \overline{X} - \mathring{X} = \{0,1\}$

0 est adhérent à $]0,1]$ mais

$0 \notin X$: $X \subset \overline{X}$

$\bar{X}$ fermé $\iff$ $\bar{X}^c$ ouvert $\mid B(x,\varepsilon)\cap X = \emptyset$.

$x \notin \bar{X}$



On veut montrer que $B(x,\varepsilon)\cap \bar{X} = \emptyset$.

$\forall y \in B(x,\varepsilon)$, $\exists \rho$ tq $B(y,\rho) \subset B(x,\varepsilon)$ car $B(x,\varepsilon)$ ouvert.

$B(y,\rho)\cap X = \emptyset$

$y \notin \bar{X}$: $B(x,\varepsilon) \subset (\bar{X})^c$

$\Rightarrow (\bar{X})^c$ est un ouvert $\Rightarrow \bar{X}$ fermé.

$\mathring{X}$ le plus grand ouvert possibl $\subset X$

$\bar{X}$ le plus petit fermé qui contient X

$]0,1] = X$

$\mathring{X} =]0,1[$

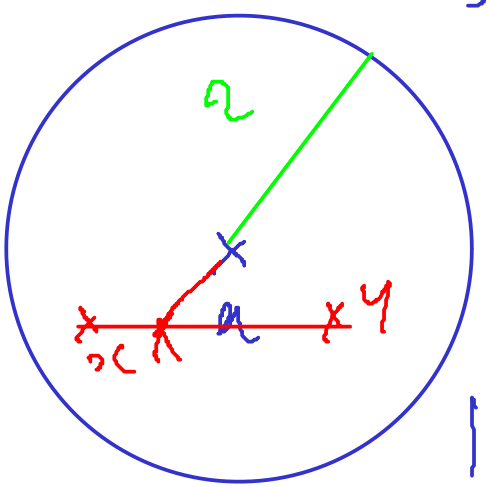
$\bar{X} = [0,1]$

Soit A bornée : $\exists M$ tq $\forall x \in A$

$\|x\| \le M \implies A \subset B(0, M+1)$

$A \subset B_F(0, M)$.

$B(a,r)$ est convexe car :



$\forall x, y \in B(a,r), \forall t \in [0,1]$.

$\|tx + (1-t)y - a\| =$

$\|t(x-a) + (1-t)(y-a)\|$

$\le \|t(x-a)\| + \|(1-t)(y-a)\|$

$\le t\|x-a\| + (1-t)\|y-a\|$

$< t r + (1-t) r = r$

donc $tx + (1-t)y \in B(a, r)$.