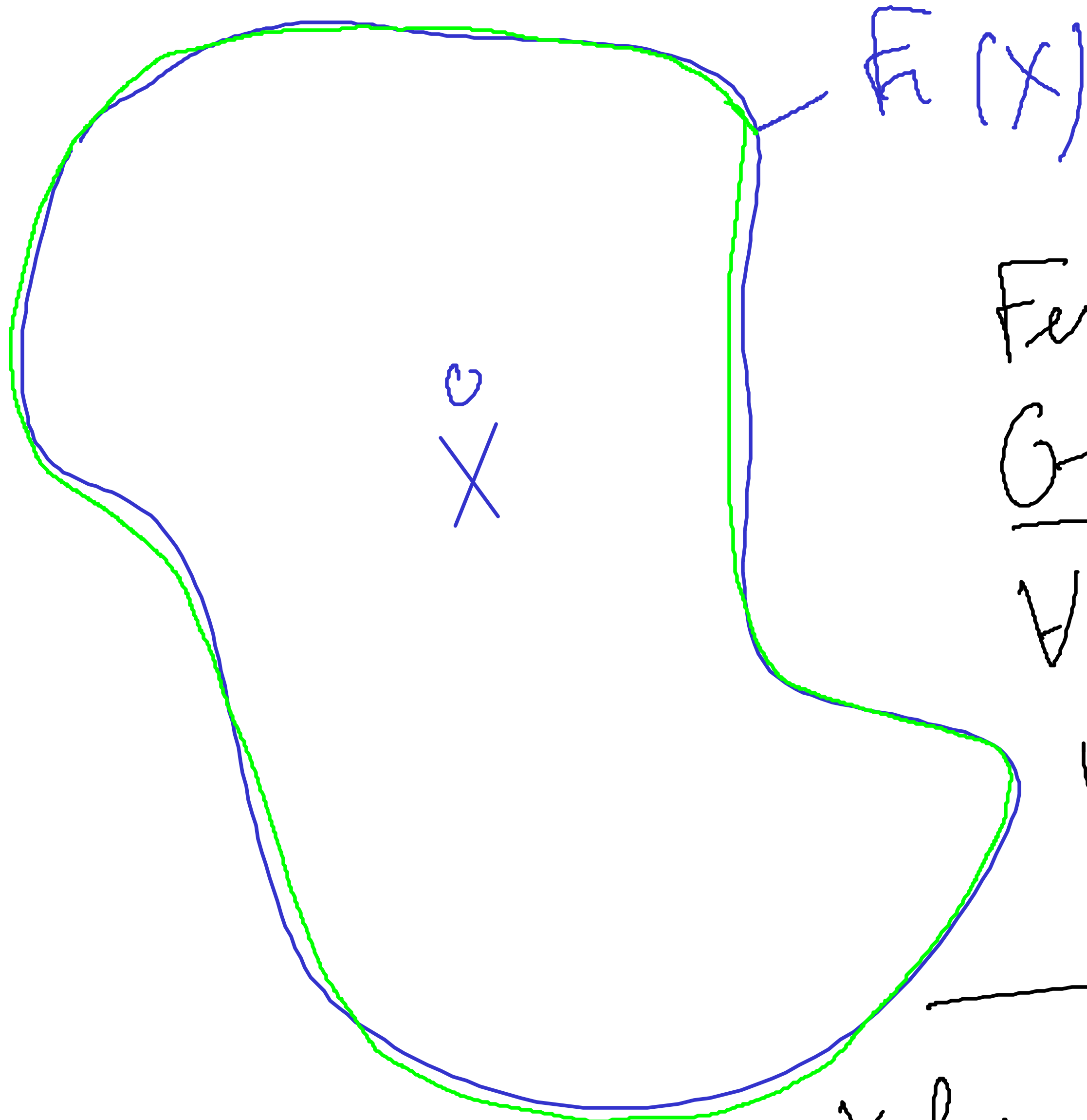


Fermé $\bar{X} = X$

<u>Ouvert</u> : U

$\forall x \in U, \exists \varepsilon > 0$

$B(x,\varepsilon) \subset U$

<u>X fermé</u> $\Longleftrightarrow$ X^c ouvert

Y^c fermé $\Longleftrightarrow$ Y ouvert

$$\mathring{X} \subset X \subset \bar{X}$$

$u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \cdot$

$(u_1, u_3, u_7 \cdot -)$

$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \nearrow$ strictement.

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\quad (U_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ $\quad (U_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$

Si (U_n) CV vers l. l est une valeur d'adhérence.

Si $(u_{\varphi(n)})$ est une suite extraite on sait que $(u_{\varphi(n)})$ converge vers l.

Donc $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une unique valeur d'adhérence l.

$\underline{U_n = n}$ (U_n) ne converge pas car elle n'est pas bornée.

$\forall\, \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante on a $\varphi(n) \geq n$ (par récurrence)

donc $U_{\varphi(n)} = \varphi(n) \geq n$ et $(U_{\varphi(n)})$ est divergente car non bornée.

(U_n) n'admet pas de valeur d'adhérence.

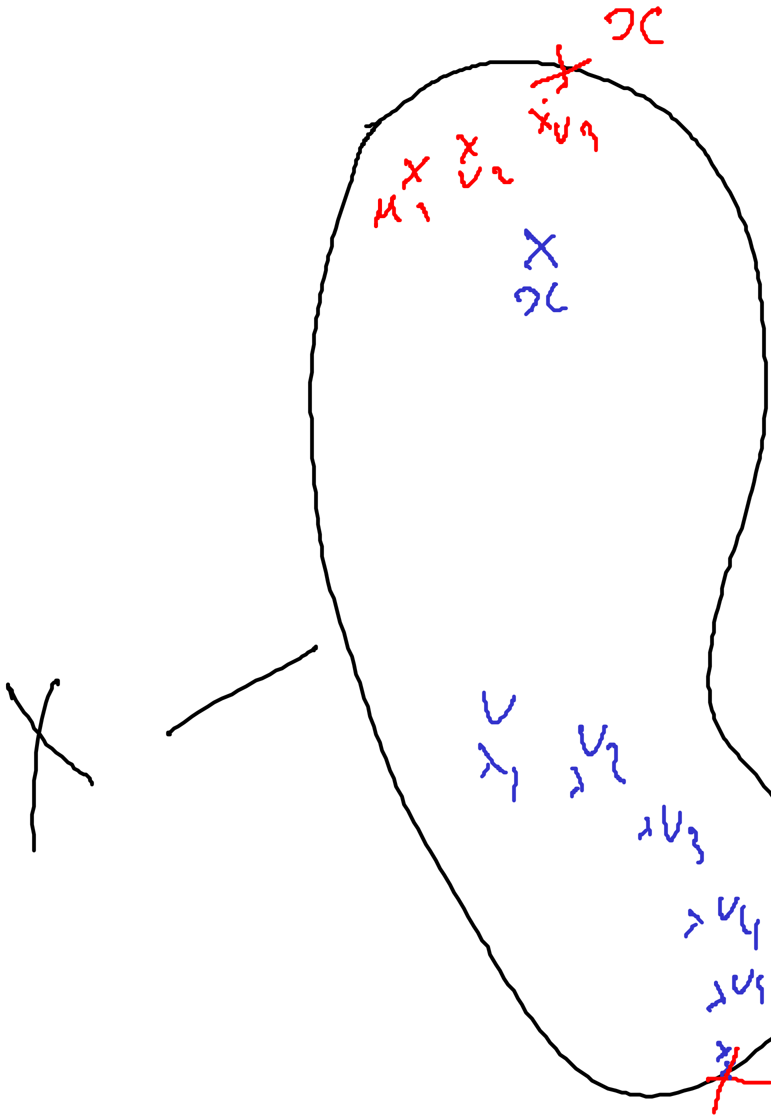
On pose $v_{2n} = 2n$ et $v_{2n+1} = 1$

On a (v_n) admet une unique valeur d'adhérence. Mais (v_n) diverge car non bornée.

$u_n = (-1)^n$ (u_n) ne converge pas car (u_{2n}) converge vers 1 et (u_{2n-1}) converge vers -1. Si (u_n) converge on devrait avoir $1 = -1$.

(u_n) possède deux valeurs d'adhérence

$u_n = \cos n$. La suite (u_n) admet une infinité de valeurs d'adhérence. L'ensemble des valeurs d'adhérence est $[-1, 1]$.



$x \in X$

On pose $u_n = x$

$(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$, (u_n) converge vers x.

$\lim u_n = l \in X$.

$\bar{X} = X$

$]0,1]$ n'est pas fermé car limite $n \neq 0$. de $\left(\frac{1}{n}\right)$ vaut $0 \notin]0,1]$

mais $\frac{1}{n} \in]0,1]$

$E = E_1 \times E_2$ $\quad W = W_1 \times W_2$ $\quad W_1$ et W_2 fermés.

$U_n = (x_n, y_n) \in W$. (U_n) converge vers $l = (l_1, l_2)$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad n \geq N \quad \|U_n - l\| \leq \varepsilon .$$

$$\|U_n - l\| = \max\left(\|x_n - l_1\|_1 , \|y_n - l_2\|_2\right) \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \|x_n - l_1\| \leq \varepsilon$$

$$\text{et } \|y_n - l_1\| \leq \varepsilon$$

Donc (x_n) converge vers $l_1 \in W_1$ car W_1 fermé

(y_n) ——————— $l_2 \in W_2$ car W_2 ———

D'où $(l_1, l_2) = l \in W_1 \times W_2$.

$W = W_1 \times W_2$. W_1 et W_2 fermé

$W^c = W_1^c \times W_2^c$ est un ouvert.

$[a, b] \times [c, d] = W$

$W^c = ?$?

$B(a,\rho) = B$.

$= \{x \text{ tq } \|x-a\| < \rho\}$

$B_F(a,\rho) = \{x \text{ tq } \|x-a\| \leq \rho\}$

$B_F(a,\rho) = \overline{B}$

$\forall (x_n)$ une suite convergente vers l : $\|x_n - a\| < \rho$ et

en passant à la limite $\|l-a\| \leq \rho$

$\Rightarrow \rho \in B_F(a,\rho)$

Don $\underline{\overline{B} \subset B_F(a,\rho)}$

Soit $x \in B_F(a,\rho)$.

$$x_n = a + \left(1-\frac{1}{n}\right)(x-a).$$

(x_n) converge vers x.

$$\|x_n - a\| = \left(1-\frac{1}{n}\right)\|x-a\| \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)\rho$$
$$< \rho.$$

$$x_n \in B(a,\rho) \Longrightarrow \underline{B_F(a,\rho) \subset \overline{B}}$$

d'où l'égalité

$x \in \bar{X}$ ssi $d(x, X) = 0$

$x \in \bar{X}$ ssi $\exists\ (x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ tq (x_n) converge vers x ssi $\inf(\|x-y\|, y \in X) = 0$

ssi $d(x, X) = 0$.

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$,

$\exists\ \frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q}$ tq $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ converge vers x.

$\mathbb{R}^n$ $\| \|_2$, $\| \|_1$, $\| \|_\infty$.

N équivalente à N $N \sim N$

$\alpha = \beta = 1$ la rela $\sim$ est réflexive :

$N \sim \| \|$, alors $\| \| \sim N$ on échang α et β.

Si M est une troisième norme :

$\| \|$ et M son équivalentes ;

$\|x\| \leq \alpha' M(x)$ et $M(x) \leq \beta' \|x\|$

et N et $\| \|$ équivalentes

N est équivalente à M car

$$N(x) \leqslant \alpha \|x\| \leqslant \alpha \alpha' M(x)$$

et $M(x) \leqslant \beta' \|x\| \leqslant \beta' \beta N(x)$

$N \sim \| \ \|$ et $\| \ \| \sim M \Rightarrow N \sim \| \ \|$.

$f, g \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$

$(f|g) = \int_a^b f(t) g(t)\,dt$ est produit scalaire ; $(f|1) = \int_a^b |f(t)| \times 1\,dt$

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f^2(t)|\,dt}$$

$$|(f|1)| \leqslant \|f\| \times \|1\|$$