$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ;

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ; ,

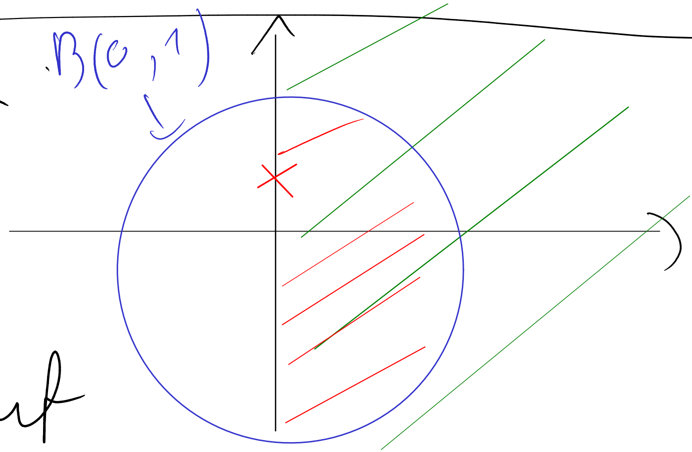
$]1,2[ \; : \longrightarrow \mathbb{R}$

$[1,2[ \cup ]2,3]$ ;

$f : \underline{\underline{A}} \subset E \longrightarrow ?$ ; $F$, $N$ ;

---

$\mathbb{R}^2$ $X = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ . $B(0,1)$



$U = X \cap B(0,1)$ ,

$U$ n'est pas un ouvert

Mais c'est un ouvert relatif à $X$.

---

$X \subset A$

$X = A \cap U$

$$
\begin{aligned}
C_A X &= A \cap X^c \\
&= A \cap (A \cap U)^c \\
&= A \cap (A^c \cup U^c) \\
&= (A \cap A^c) \cup (A \cap U^c) \\
&= A \cap U^c
\end{aligned}
$$

Si $X = A \cap U$ avec ouvert, alors $C_A X = A \cap U^c$ avec $U^c$ fermé. Même chose si $X = A \cap U$ $U$ fermé, alors $C_A X = A \cap U^c$ ouvert

Si $X$ fermé relatif à $A$.

$$X = A \cap F$$

Soit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ tq $\lim x_n = a \in A$.

Mais $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$, donc $\lim\limits_n x_n = a \in F$

(caractérisation des fermés)

Donc $a \in A \cap F = X$.

Pour montrer que $X$ est fermé, on va montrer que $X = A \cap \bar{X}$

On a certainement $X \subset A \cap \overline{X}$ car $X \subset \overline{X}$.

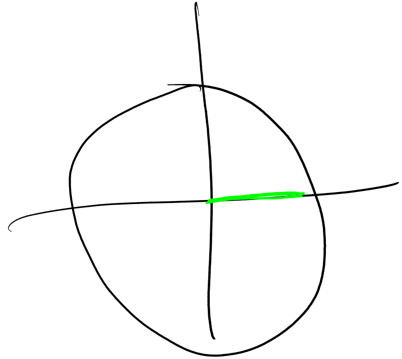
Soit $x \in A \cap \overline{X}$ : $\exists (x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $x$. Mais alors $x \in A$.

Par hypothèse, $x \in X$.

D'où $A \cap \overline{X} \subset X$.

On a bien l'égalité.

$X = B(0,1) \cap [0,1] \times \{0\}$



$X$ est un fermé relatif à $B(0,1)$

Mais $X = [0,1[ \times \{0\}$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}^2$ : $\lim \underbrace{(1-\frac{1}{n}, 0)}_{\in X} = \underbrace{(1,0)}_{\notin X}$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$x \longmapsto (\cos x, \sin x)$$

$f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ car $\cos, \sin \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

---

$$\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_1^{\alpha_1} \quad x_n^{\alpha_p}$$

$p_k : (x_1, \ , x_n) \longmapsto x_k$ est continue

$\|(x_1, \ , x_n)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \quad + x_n^2} \geq |x_k|$

et donc :

$$|p_k(x_1, \ldots, x_n) - p_k(y_1, \ldots, y_n)|$$

$$= \underline{|x_k - y_k|} \leq \|(x_1, \ldots, x_n) - (y_1, \ldots, y_n)\|_2$$

$$= \underline{\|(x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)\|_2}$$

$p_k$ est 1-lipschitzienne $\Rightarrow \mathcal{C}^0$.

Enfin le produit de fonctions continues est continue donc :

$$(x_1 \dots x_n) \longmapsto x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

est continue.

$$(x, y, z) \longmapsto \cos xy + e^{yz}$$

$\mathcal{C}^0$

point fixe ; $f(x) = x$ .

$g(x) = 0$ on pose $h = g + id$ ;

$h(x) = x$ ;

$g(x) = 0 \iff$

---

$A \subset E$ A fermée ;

$f : A \longrightarrow A$ f est contractante ;

$\forall x, y \in E$ $\|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|$

avec $0 \leq k < 1$

Unicité On suppose $f(l)=l$ et $f(l')=l'$

f contractante donc

$$\|f(l)-f(l')\|=\|l-l'\| \leq k\|l-l'\|$$

avec $k<1$

$$0\leq(1-k)\|l-l'\| \leq 0 \Rightarrow \|l-l'\|=0$$

par hypothèse car $k<1$

$$\Rightarrow l=l'$$

Donc s'il existe le point fixe est unique.

Si $\dim E < \infty$ ($\dim E = n$, $n \in \mathbb{N}$) :

Soit $x_0 \in A$, $x_{n+1} = f(x_n)$.

la suite est bien définie car

$f : A \to A$.

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \leq k \|x_n - x_{n-1}\|$$

par récurrence : $\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\|$

$\sum k^n$ est une série convergente car $0 < k < 1$

D'où $\sum \|x_{n+1} - x_n\|$ converge. Dim $E < \infty$.

d'où $\sum (x_{n+1} - x_n)$ converge.

Or $S_n = \sum_{k=0}^{n} (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_0$

$(S_n)$ converge donc $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ converge vers $a$.

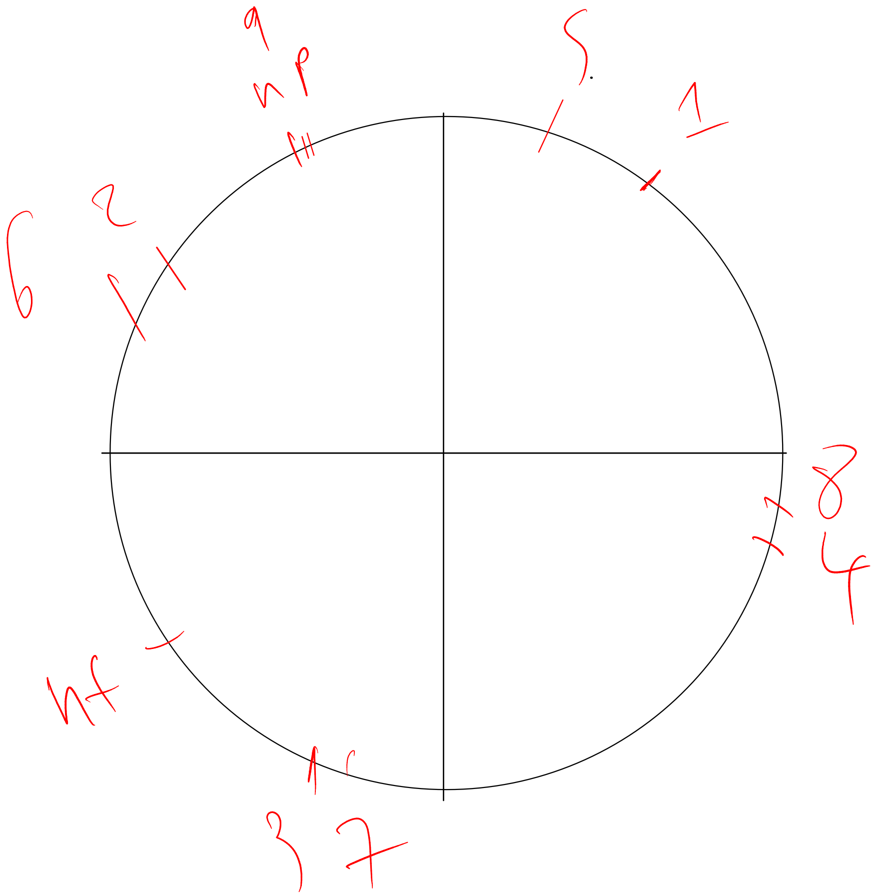
Or $A$ est fermé, donc $a \in A$.

Montrons que $f(a) = a$ :

Comme $f$ est continue

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a) \text{ et } \lim_{n \to +\infty} x_{n+1} = a$$

On en déduit $f(a) = a$.



proposition 9.1

$f^{-1}(U)$ est ouvert ?

$f : A \longrightarrow F$ $f^{-1}(U)$ est un ouvert relatif à $A$.

De même $f^{-1}(V)$ fermé relatif à $A$.

---

$Y \in F$ $f^{-1}(Y^c) = f^{-1}(Y)^c$