$? : 1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$

$\underline{N(f(x)) \leq M\|x\|} \Rightarrow f$ $\underline{M\text{-lipschitzienne}}$

$\Rightarrow \forall x, y \in E$

$N(f(x) - f(y)) \underset{\text{linéaire}}{=} N(f(x-y)) \leq M\|x-y\|$

On dit que si $\|x\| \leq 1$, alors $N(f(x)) \leq M$:

f bornée sur la boule unité :

f bijective : $\forall y \in F \ \exists x \in E \ f(x) = y$

$\alpha\|x\| \leq N(f(x)) \Leftrightarrow \alpha\|f^{-1}(y)\| \leq N(y)$

$$\|f^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{\alpha} N(y)$$

Donc si $N(y) \leq 1$, $\|f^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{\alpha}$

et f^{-1} bornée sur la boule unité fermée . .

Si f continue $\exists \beta$ tq $\forall x \in B(0,1)$

$N(f(x)) \leq \beta \Rightarrow \forall x \in E \neq 0$

$N f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \leq \beta \Rightarrow N(f(x)) \leq \beta\|x\|$

Propriété globale : $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée.

Théorème de Heine : une fonction continue sur un segment est uniformément.

Et si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ A segment ? compact

$h_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ homothétie
$x \longmapsto ax$

$\mathcal{Y}(\mathbb{R}) = \{ h_a , a \in \mathbb{R} \}$

L'implication ..

En général, une suite qui a une seule valeur d'adhérence est-elle convergente ? suite qui a une unique valeur d'adhérence est-elle convergente ?

$u_{2n} = \frac{1}{}$ et $u_{2n+1} = n$ (u_n) admet une seule valeur d'adhérence : 1 mais n'est pas bornée.

Si K compact et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ / E.

et (u_n) convergente vers $l \in E$

Il faut prouver que $l \in K$.

Il existe $(v_{p(n)})$ qui converge vers $l' \in K$.

$$\Longrightarrow \quad l = l' \in K$$

Par caractérisation d'un fermé par les suites, K est fermé.

$w_{p(n)} = (u_{p(n)}, v_{p(n)})$

$\forall n \; v_{p(n)} \in K_2$ compact donc $\exists$ $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $n \longmapsto \tau(n)$ strictement croissante $(v_{p(\tau(n))})$ est une suite extraite convergente vers v.

$(u_{\varphi(\tau(n))})$ est une suite extraite de $(u_{\varphi(n)})$ qui converge vers u, donc la suite $(u_{\varphi\circ\tau(n)})$ converge vers u

$(w_{\varphi\circ\tau(n)})$ converge vers (u, v)

K fermée, bornée non compacte :

$\mathbb{K}[X] = E$, si $P = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i$, $\|P\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{+\infty} a_i^2}$

$K = \{1, X, \quad , X^n, \dots\} = \{X^i, i \in \mathbb{N}\}$

$\forall i \quad \|X^i\| = 1$. donc K est bornée.

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ une suite convergente

$P_n = X^{\alpha_n}$ Si $\alpha_n \neq \alpha_{n'}$ $\|P_n - P_{n'}\| = \|X^{\alpha_n} - X^{\alpha_{n'}}\|$
$= \sqrt{2}$

Si (P_n) cv vers P, alors $\forall \varepsilon > 0, \exists N$:

$\forall n \geq N \quad \|P_n - P\| \leq \varepsilon$

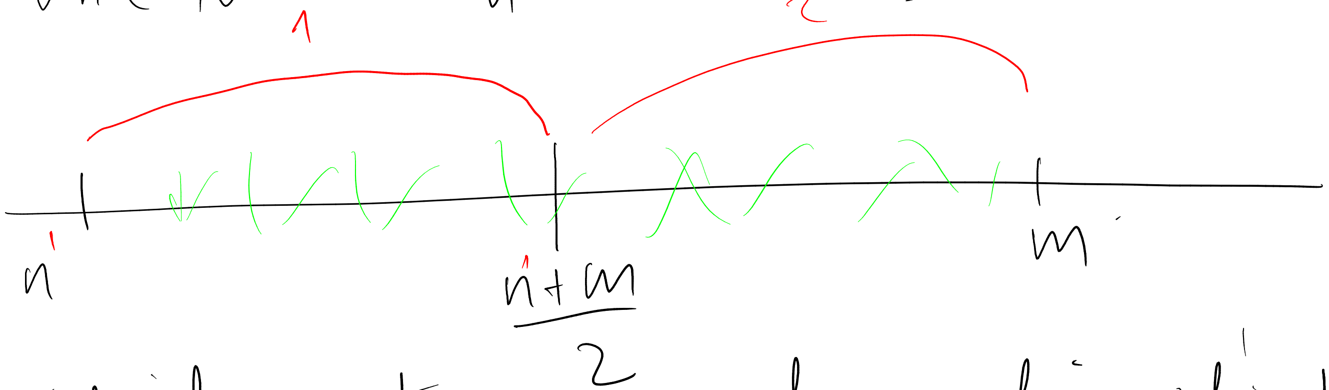
$m \geq N \quad \|P_m - P\| \leq \varepsilon$

$\| P_m - P_n \| \leq \| P_m - P \| + \| P - P_n \| \leq 2\varepsilon$

si $m \neq n$

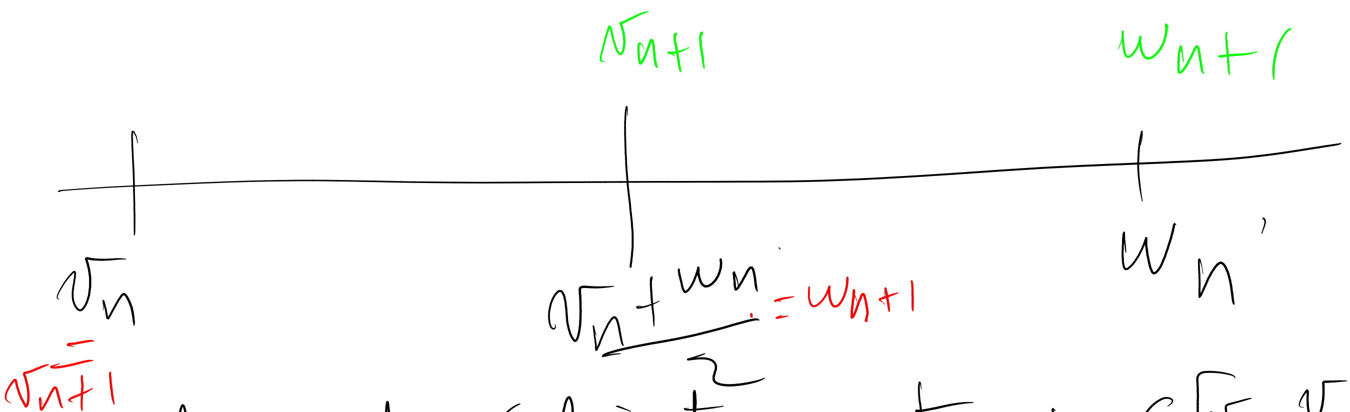
$= \sqrt{2}$ si $\varepsilon < \frac{\sqrt{2}}{2}$, alors on a une contradiction.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [n', m]$.



1 × soit il existe un nombre infini d'indices tels que $u_n \in [n', \frac{n'+m}{2}]$

2 × Sinon ; on a une infinité d'indices tq $u_n \in [\frac{m+n'}{2}, m]$



Si il existe infinité ... tq $u_k \in \left[v_n, \frac{v_n+w_n}{2}\right]$

alors $v_{n+1} = v_n$ et $w_{n+1} = \frac{v_n+v_n}{2}$

Sinon; $v_{n+1} = \frac{v_n+w_n}{2}$ $w_{n+1} = w_n$

K fermée et bornée.

Si on prend la $\| \|_\infty$ sur E.

(toutes normes sont équivalentes en dimension finie) ; $(e_1 \dots e_n)$ une base E et si $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$,

alors $\|x\|_\infty = \sup_{i \in [1,n]} |x_i|$.

$$B_F(0,M) = [-M,M] \times [-M,M] \times \dots \times [-M,M]$$

$$= \{ x_1 e_1 + \dots + x_n e_n,\ (x_1, \dots, x_n) \in [-M,M]^n \}$$

$[-M,M]$ est compact, donc $[-M,M]^n$ est compact.

K borné $\Rightarrow \exists M \quad K \subset \underset{F}{B(0, M)}$ compact.

Or K est fermé, donc K est compact.