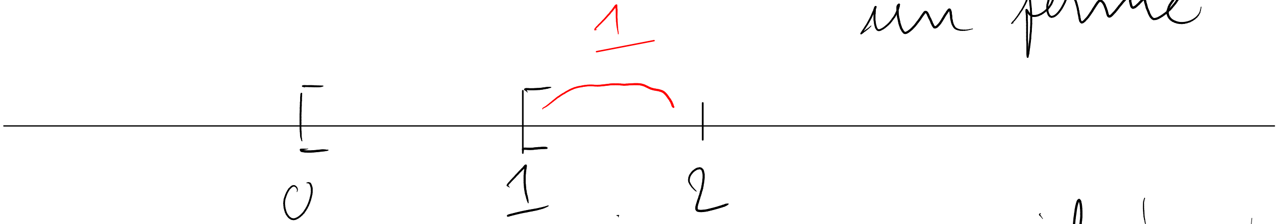
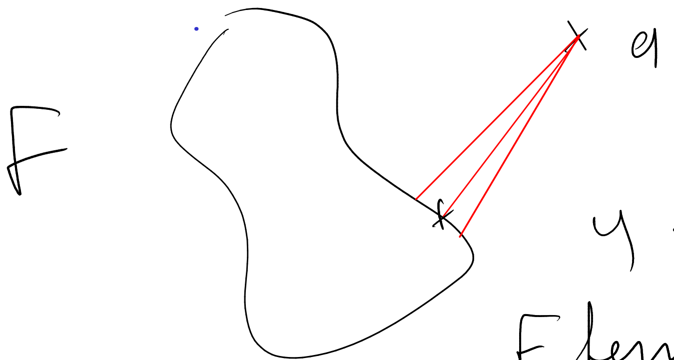
si $E = \mathbb{R}$, $X = [0,1[$ n'est pas un fermé.

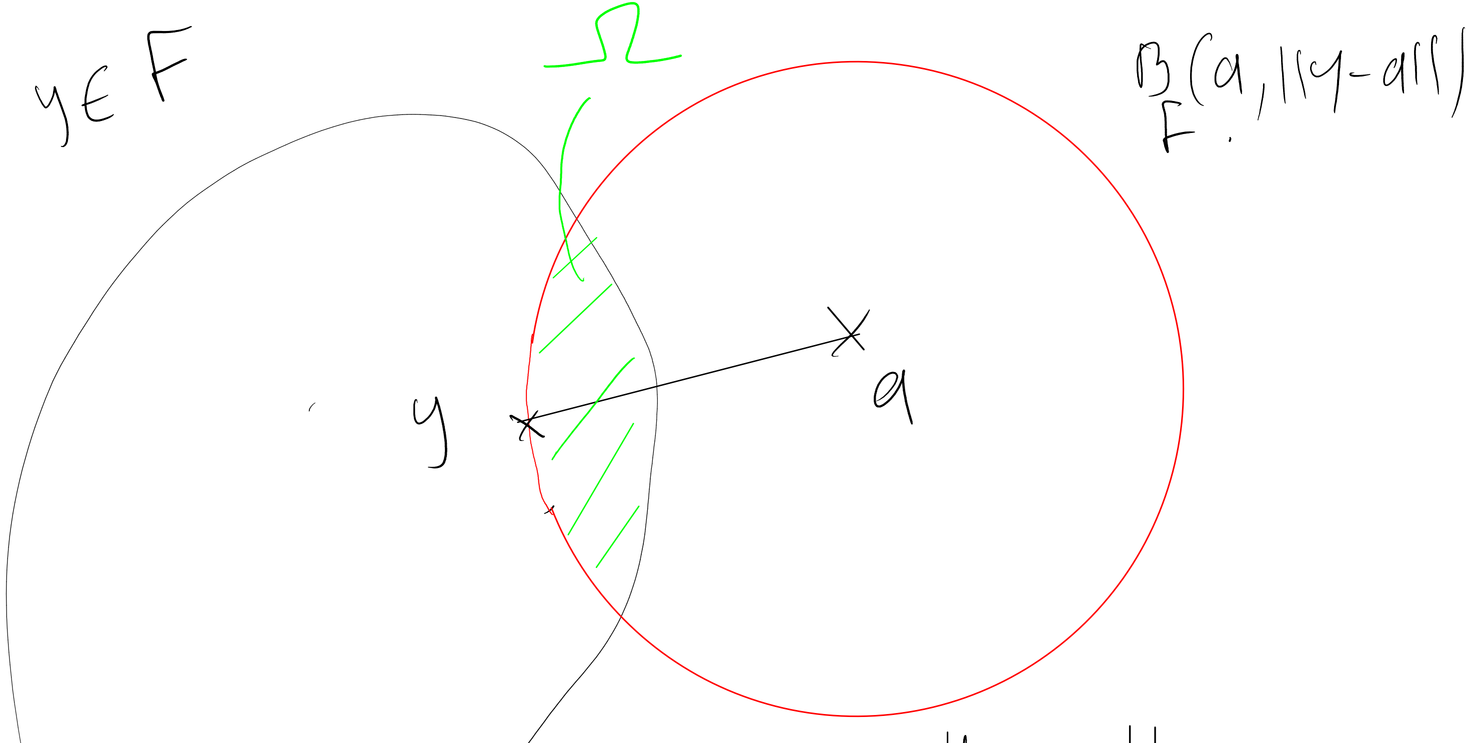


$d(2, [0,1[) = 1$. Mais, il n'existe pas $x \in [0,1[$ tel que $d(2,[0,1[) = \|2-x\|$



y existe

F fermé $\Longleftrightarrow F = \overline{F}$



$$d(a, F) \leq \|y - a\|$$

$$\inf(\|z - a\|, z \in F) \leq \|y - a\|$$

$$= \inf(\|z - a\|, z \in F \cap B_F(a, \|y - a\|))$$

$$\Omega = F \cap \underbrace{B_F(a, \|y-a\|)}_{\text{compact car en dimension finie}}$$

donc Ω est compact car c'est un fermé (F est fermé) inclus dans un compact.

$$d(a,F) = \inf\{\|z-a\|,\ z \in \Omega\}.$$

Par définition de la borne inférieure il existe une suite $(z_n) \in \Omega^{\mathbb{N}}$ telle que $(\|z_n - a\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $d(a,F)$.

⚠ (z_n) n'est pas nécessairement convergente !

Mais : $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Omega^{\mathbb{N}}$ et Ω compacte

donc il existe une suite extraite $(z_{\varphi(n)})$ qui converge vers $z \in \Omega$.

Par construction $\|z-a\| = d(a,F)$ □

Une intersection non vide de compacts ;
$(K_i)_{i\in J}$ de compact et on pose

$$K = \bigcap_{i\in J} K_i \neq \emptyset$$

Si on en $\{0\} \cap \{1\} = \emptyset$.

Une intersection décroissante ?

$A_n \subset \mathbb{R}$ décroissante $A_{n+1} \subset A_n$

$\bigcap A_n$ vide ? $\quad$ (A_n non compact)

$A_n = [n, +\infty[$ ou $\quad A_n =]1-\frac{1}{n}, 1[$

f k-lipschitzienne ;

$\forall x, y \in K \quad N(f(x) - f(y)) \leq k \|x - y\|$

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

$\Rightarrow x \neq y \quad \left| \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq k$.

$\Rightarrow \quad |f'| \leq k$.

$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \sqrt{x}$.

Heine : uniformément

Mais elle n'est pas lipschitzienne.