Ex 1 $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ si $\sum |U_n|$ CV.

$\|U\|_1 = \sum_{n\geq 0} |U_n|$ et $\|U_n\|_\infty = \sup |U_n|$

1) * E sous-espace vectoriel ? car $0 \in E$ et $\forall u, v \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $|\lambda u_n + \mu v_n| \leq |\lambda| |U_n| + |\mu| |v_n|$

On en déduit que $\sum |\lambda U_n + \mu v_n|$ converge car majorée par une série convergente.

Et donc $\lambda u + \mu v \in E$.

* $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_\infty$ sont des normes sur E car :

o) $\|U\|_1 = \sum |U_n|$ existe $U \in E$.

$\|U\|_\infty = \sup |U_n|$ existe car $\sum |U_n|$ CV et donc $|U_n|$ borné.

i) $\|U\|_1 = 0 \Leftrightarrow \sum |U_n| = 0 \Leftrightarrow \forall n, U_n = 0 \Leftrightarrow U = 0$

De même : $\|u\|_\infty = 0 \iff \sup_{\mathbb{N}} |u_n| = 0 \iff u = 0$

ii) $\forall u \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda u_n| = |\lambda|\,|u_n|$ et

donc $\|\lambda u\|_1 = |\lambda|\,\|u\|_1$ et $\|\lambda u\|_\infty = |\lambda|\,\|u\|_\infty$

iii) $\forall u, v \in E$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n|$

On en déduit que :

$\|u+v\|_1 \leq \|u\|_1 + \|v\|_1$ et $\|u+v\|_\infty \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$

2) $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_\infty$ équivalentes ?

c'est-à-dire $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in E$

$\|x\|_1 \leq \alpha \|x\|_\infty$ et $\|x\|_\infty \leq \beta \|x\|_1$

On $(u_n^k) = v^k$; $\quad v_n^k = 1$ si $n \leq k$

$\qquad\qquad\qquad v_n^k = 0$ sinon ;

$$u_n^k = (\underset{0}{1}, 1, \quad \underset{k}{1}, 0, \ldots, 0, \ldots) ;$$

$\|v^k\|_1 = k+1 \quad \|v^k\|_\infty = 1$; $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \frac{\|v^k\|_1}{\|v^k\|_\infty} = +\infty$

et donc $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_\infty$ ne sont pas équivalentes ∠ n'existe pas.

Mais on a ; $\forall n$, $|v_n| \leq \|v\|_1 = \sum |v_n|$;

donc $\quad \|v\|_\infty \leq \|v\|_1$.

3) $A = \{ (U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $\exists N, n \geq N \Rightarrow U_n = 0 \}$

1ère remarque : si $n \geq N$ $U_n = 0$

$\sum_{n=0}^{+\infty} |U_n| = \sum_{n=0}^{N} |U_n|$ somme finie, en particulier

elle est convergente : donc $A \subset E$

$\overline{A}$? adhérence de A : on montre $\overline{A} = E$:

$\forall (U_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$. Pour $k \in \mathbb{N}$ on pose

$V_n^k = U_n$ si $n \leq k$ et 0 sinon

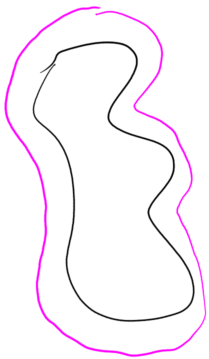
$V^k = (U_0, \quad , U_k, 0 \text{ - - - })$

$$\|u - v^k\|_1 = \sum_{n \geq 0} |u_n - v_n^k| = \sum_{n \geq k+1}^{+\infty} |u_n| = R_{k+1} \to 0$$

Donc (v^k) converge vers u pour $\| \; \|_1$.

Exercice 3 $A \subset E$ $A \neq \emptyset$. $\forall x \in E$ $d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$.

$\forall R > 0$, $A(R) = \{ x \in E, \; d(x, A) \leq R \}$



i) A fermé $\varphi : \begin{array}{l} x \longmapsto d(x, A) \\ E \longrightarrow \mathbb{R} \end{array}$

est 1-lipschitzienne $\Rightarrow \varphi$ est $\mathcal{C}^0$,

$A = \varphi^{-1}([0, R])$ l'image réciproque

d'un fermé par une application

continue : A est fermé.

Supposons A est convexe.

$\underline{\forall a, b \in A(R)}$ et $\underline{\forall t \in [0,1]}$, $t a + (1-t) b \in A(R)$?

A est convexe donc $\forall x, y \in A$, $t x + (1-t) y \in A$.

$$\underbrace{\| t a + (1-t) b - (t x + (1-t) y) \|}_{\in A} = \| t(a-x) + (1-t)(b-y) \|$$

$$\leq t \|a-x\| + (1-t) \|b-y\|$$

Par définition de $d(t a + (1-t) b, A)$, on a :

$$\underline{d(t a + (1-t) b, A)} \leq t \|a-x\| + (1-t) \|b-y\|$$

Par définition de la borne inférieure :

$$d(t a + (1-t) b, A) \leq t \underbrace{d(a, A)}_{\leq R} + (1-t) \underbrace{d(b, A)}_{\leq R}$$

$$\leq tR + (1-t)R = R.$$

$$\Rightarrow \underline{ta + (1-t)b \in A(R)}$$

$A(R)$ est convexe.