



---

# A n a l y s e 4

---

ÉCOLE CENTRALE DE PÉKIN

*Cours de mathématiques du cycle préparatoire*

8 septembre 2020

---

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Espaces vectoriels normés</b>	<b>1</b>
1.1	Normes	1
1.1.1	Définitions	1
1.1.2	Distance associée à une norme	2
1.1.3	Espaces vectoriels produits	4
1.1.4	Parties bornées, convexes	4
1.1.5	Fonctions convexes	5
1.1.6	Distance à une partie	6
1.2	Topologie dans un espace vectoriel normé	6
1.2.1	Parties ouvertes, fermées	6
1.2.2	Topologie	7
1.2.3	Topologie et suites	8
1.2.4	Caractérisation par les suites	9
1.2.5	Comparaison de normes	9
1.2.6	Topologie induite	11
1.3	Continuité	12
1.3.1	Définitions	12
1.3.2	Caractérisations	13
1.3.3	Uniforme continuité	16
1.3.4	Continuité et densité	16
1.4	Compacité	17
1.4.1	Définition	17
1.4.2	Caractérisation en dimension finie	18
1.4.3	Applications	19
1.4.4	Continuité sur un compact	19
1.4.5	Théorème de Heine	20
1.4.6	Équivalence des normes	20
1.5	Application bilinéaires	20
1.6	Normes sur les applications linéaires en dimension finie	21

---

# Chapitre 1      Espaces vectoriels normés

## Table des matières du chapitre

---

<b>1.1</b>	<b>Normes</b> .....	<b>1</b>
1.1.1	Définitions .....	1
1.1.2	Distance associée à une norme .....	2
1.1.3	Espaces vectoriels produits .....	4
1.1.4	Parties bornées, convexes .....	4
1.1.5	Fonctions convexes .....	5
1.1.6	Distance à une partie .....	6
<b>1.2</b>	<b>Topologie dans un espace vectoriel normé</b> .....	<b>6</b>
1.2.1	Parties ouvertes, fermées .....	6
1.2.2	Topologie .....	7
1.2.3	Topologie et suites .....	8
1.2.4	Caractérisation par les suites.....	9
1.2.5	Comparaison de normes .....	9
1.2.6	Topologie induite .....	11
<b>1.3</b>	<b>Continuité</b> .....	<b>12</b>
1.3.1	Définitions .....	12
1.3.2	Caractérisations .....	13
1.3.3	Uniforme continuité .....	16
1.3.4	Continuité et densité .....	16
<b>1.4</b>	<b>Compacité</b> .....	<b>17</b>
1.4.1	Définition .....	17
1.4.2	Caractérisation en dimension finie .....	18
1.4.3	Applications.....	19
1.4.4	Continuité sur un compact .....	19
1.4.5	Théorème de Heine.....	20
1.4.6	Équivalence des normes .....	20
<b>1.5</b>	<b>Application bilinéaires</b> .....	<b>20</b>
<b>1.6</b>	<b>Normes sur les applications linéaires en dimension finie</b> .....	<b>21</b>

---

On note  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

On veut définir sur  $E$  une notion de norme et de distance qui nous permette de retrouver les intuitions géométriques du plan ou de l'espace.

L'absence de produit scalaire peut induire des différences importantes.

Mais nous allons voir aussi que la géométrie induite en dimension infinie induit des phénomènes exotiques qui n'apparaissent pas en dimension finie.

## 1.1 NORMES

### 1.1.1 Définitions

#### DÉFINITION 1

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel On appelle norme (范数) sur  $E$ , toute application  $N$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}_+$  vérifiant :

1.  $\forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$  (séparation de la norme)
2.  $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$  (homogénéité de la norme)

3.  $\forall x, y \in E, \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y)$  (inégalité triangulaire \ 三角不等式 \)

On dit que  $(E, \|\cdot\|)$  est un espace vectoriel normé

EXEMPLE 2 — Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1. Si  $E$  est de dimension finie rapporté à une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ . Soit  $x = (x_1, \dots, x_n)$  un vecteur de  $E$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

(a) L'application  $\|\cdot\|_2 : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$  est une norme.

(b) L'application  $\|\cdot\|_1 : (x_1, \dots, x_n) \mapsto |x_1| + \dots + |x_n|$  est une norme.

(c) L'application  $\|\cdot\|_\infty : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sup_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i|$  est une norme, souvent appelée la norme sup ou norme "infini".

2. Soit  $I$  un intervalle non vide non réduit à un point.

(a)  $\|\cdot\|_2 : f \mapsto \|f\|_2 = \sqrt{\int_I |f(t)|^2 dt}$  (norme de la convergence quadratique) sur  $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{R})$ .

(b)  $\|\cdot\|_1 : f \mapsto \|f\|_1 = \int_I |f(t)| dt$  (norme de la convergence moyenne) sur  $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$ .

(c)  $\|\cdot\|_\infty : f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{[a,b]} |f(t)|$  que l'on notera aussi parfois :  $\|\cdot\|_\infty^{[a,b]}$  : sur  $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ , où  $I = [a, b]$  (norme de la convergence uniforme).

3. Si  $(E, \|\cdot\|)$  est un espace vectoriel normé de dimension finie, quelle norme choisir pour  $\mathcal{L}(E)$  ? ou  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  ?

DÉFINITION 3

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $I \neq \emptyset$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow E$  une fonction. On dit que  $f$  est bornée s'il existe un réel  $M > 0$  tel que  $\forall x \in I, \|f(x)\| \leq M$ . On note  $\mathcal{B}(I, E)$  l'ensemble des fonctions bornées de  $I$  dans  $E$ .

PROPOSITION 4

L'ensemble  $\mathcal{B}(I, E)$  est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de  $I$  dans  $E$  et l'application  $\mathcal{B}(I, E) \rightarrow \mathbb{R}_+, f \mapsto \sup_{x \in I} \|f(x)\|$  est une norme notée  $\|\cdot\|_\infty$  et que l'on appelle norme sup, "infini" ou norme de la convergence uniforme.

**Preuve** —  $\mathcal{B}(I, E)$  est bien un sous-espace vectoriel (exercice).

Si  $f \in \mathcal{B}(I, E)$ , l'ensemble  $\{\|f(x)\|, x \in I\}$  est une partie non vide bornée de  $\mathbb{R}$  et donc admet une borne supérieure, ce qui montre que  $\|\cdot\|_\infty$  est bien définie, à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ .

Il est clair que si  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} \|f(x)\| = 0$ , alors  $f(x) = 0$  pour tout  $x \in I$  et  $f$  est bien la fonction nulle.

L'homogénéité de la norme ne pose pas de problème et l'inégalité triangulaire est une conséquence immédiate de celle de  $E$  :

$$\forall x \in I, \|f(x) + g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \Rightarrow \|f + g\|_\infty \leq \sup_{x \in I} \|f(x)\| + \sup_{x \in I} \|g(x)\|.$$

Par définition de la borne supérieure, on obtient  $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ . □

REMARQUE 5 — Vous verrez en Algèbre 3 que si  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire  $\varphi$  (forme bilinéaire symétrique définie positive), alors  $\|\cdot\| : x \mapsto \sqrt{\varphi(x, x)}$  définit une norme sur  $E$ . On dit que  $\|\cdot\|$  provient d'un produit scalaire

De manière stratégique, si vous voyez (intuïtez) qu'une norme provient d'un produit scalaire, il est toujours plus rapide de passer par le produit scalaire : ceci montre en particulier que la norme euclidienne est une norme.

La norme sup ne provient pas d'un produit scalaire.

### 1.1.2 Distance associée à une norme

## DÉFINITION 6

Si  $\| \cdot \|$  est une norme sur  $E$ , on appelle distance (距离) associée à  $\| \cdot \|$  l'application

$$d : \begin{cases} E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (u, v) \mapsto \|v - u\| \end{cases} .$$

## PROPOSITION 7

(Définition d'une distance)

1.  $(\forall v \in E) \quad d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$
2.  $(\forall u, v \in E) \quad d(u, v) = d(v, u)$
3.  $(\forall u, v, w \in E) \quad d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$

REMARQUE 8 — L'inégalité triangulaire entraîne

- i)  $d(a, b) \leq d(a, c) + d(b, c)$
- ii)  $d(b, c) \leq d(a, c) + d(a, b)$

dont on déduit l'encadrement

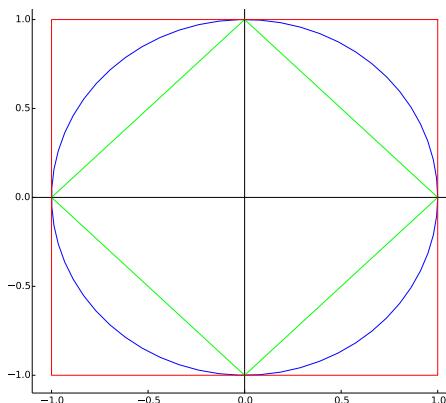
$$|d(a, b) - d(b, c)| \leq d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c) .$$

EXEMPLE 9 — Dans  $\mathbb{R}^2$  tracer le cercle de centre 0 et de rayon 1 pour les distance associées aux normes ci-dessous :

1.  $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ .
2.  $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$
3.  $\|x\| = |x_1| + |x_2|$

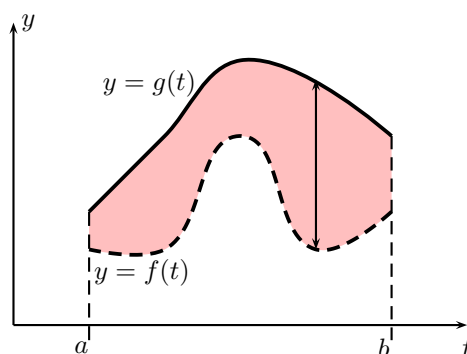
Pour chacune de ces normes, la sphère unité est  $\mathcal{S}_i = \{x \in E, \|x\|_i = 1\}$ .

La forme change, mais on verra qu'en dimension finie, si une suite  $(u_n)$  converge pour une norme, elle convergera pour toutes les normes (on dit que les normes sont équivalentes).



La norme  $\| \cdot \|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}$  permet de passer de  $\mathcal{S}_2$ , un cercle, à  $\mathcal{S}_\infty$ , un carré (quadrature du cercle).

EXERCICE 10 — Sur la figure ci-dessous, indiquer les distances  $\|g - f\|_\infty$  et  $\|g - f\|_1$



### 1.1.3 Espaces vectoriels produits

DÉFINITION 11

Soit  $(E_i, \|\cdot\|_i)_{i \in [1, n]}$  une famille finie d'espaces vectoriels normés. On définit sur  $E = \prod_{i=1}^n E_i$  une structure d'espace vectoriel normé en posant

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \max_{i \in [1, n]} \|x_i\|_i.$$

REMARQUE 12 — L'espace produit a une structure naturelle d'espace vectoriel (déjà vu). Il faut vérifier que l'on définit bien une norme. On procède par récurrence sur  $n$ .

Le cas  $n = 2$  : l'application est bien à valeurs positives, l'homogénéité de la norme provient de celle des normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$ . De plus,  $\|(x_1, x_2)\| = 0$  implique  $\|x_1\|_1 = \|x_2\|_2 = 0$  et donc  $x_1 = 0_{E_1}$  et  $x_2 = 0_{E_2}$  et donc  $(x_1, x_2) = (0_{E_1}, 0_{E_2})$ .

Enfin, pour l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} \|(x_1, x_2) + (y_1, y_2)\| &= \max(\|x_1 + y_1\|_1, \|x_2 + y_2\|_2) \\ &\leq \max(\|x_1\|_1 + \|y_1\|_1, \|x_2\|_2 + \|y_2\|_2) \\ &\leq \max(\max(\|x_1\|_1, \|x_2\|_2) + \max(\|y_1\|_1, \|y_2\|_2), \\ &\quad \max(\|x_1\|_1, \|x_2\|_2) + \max(\|y_1\|_1, \|y_2\|_2)) \\ &= \max(\|x_1\|_1, \|x_2\|_2) + \max(\|y_1\|_1, \|y_2\|_2) \end{aligned}$$

L'hérédité est immédiate.

EXEMPLE 13 —  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$  peut être vu comme le produit de  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$  munis des normes sup ou encore comme le produit de  $n$  fois  $\mathbb{R}$ .

REMARQUE 14 — Un produit quelconque d'espaces vectoriels (indexé par un ensemble non nécessairement fini) a une structure naturelle d'espaces vectoriels, mais pas d'espace vectoriel normé : le maximum d'une famille infinie n'existe pas nécessairement !

### 1.1.4 Parties bornées, convexes

DÉFINITION 15

Une partie non vide  $X$  de  $(E, \|\cdot\|)$  est bornée s'il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall x \in X, \|x\| \leq M$ . Si  $X$  est une partie bornée, on appelle diamètre de  $X$  le réel positif

$$\delta(X) = \sup_{(x, y) \in X^2} \|y - x\|$$

DÉFINITION 16

Soit  $A$  un ensemble non vide et  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. Une application  $f : A \rightarrow E$  est bornée s'il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall a \in A, \|f(a)\| \leq M$ .

## DÉFINITION 17

Une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est une suite bornée de  $(E, \|\cdot\|)$  si  $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$  est une partie bornée de  $(E, \|\cdot\|)$ .

REMARQUE 18 — Ces notions dépendent a priori de la norme considérée sur  $E$  : sur  $\mathbb{R}[X]$ , la suite  $(X^n)_{n \geq 0}$  est bornée pour la norme  $\|\cdot\|_{\infty}^{[0,1]}$ , mais ne l'est pas pour  $\|\cdot\|_{\infty}^{[0,2]}$ .

En dimension finie, une partie bornée pour une norme sera bornée pour toutes les normes.

## DÉFINITION 19

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $A, B \in E$ . On appelle segment d'extrémités  $A$  et  $B$  l'ensemble

$$[AB] = \{(1-t)A + tB \in E \mid t \in [0; 1]\}.$$

REMARQUE 20 — De manière équivalente,  $[AB]$  est l'ensemble des point  $M$  tel que  $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$  avec  $0 \leq t \leq 1$ , et ceci correspond bien à l'intuition.

## DÉFINITION 21

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $C \subset E$  une partie de  $E$ . On dit que  $C$  est une partie convexe de  $E$  si

$$\forall M, N \in C, [M, N] \subset C.$$

EXEMPLE 22 — Les parties convexes de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles ! Un sous-espace vectoriel est convexe.

REMARQUE 23 — Un produit de parties convexes (resp. bornée) est convexe (resp. bornée) dans l'espace vectoriel produit.

## 1.1.5 Fonctions convexes

## DÉFINITION 24

Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $A \subset E$  une partie convexe de  $E$ .

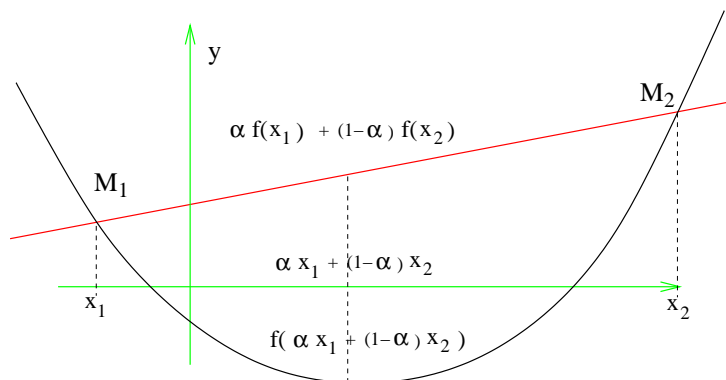
1. Soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est convexe lorsque

$$\forall x_1, x_2 \in A \quad \forall \alpha \in [0, 1] \quad f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2).$$

2. Lorsque  $-f$  est convexe, on dit que  $f$  est concave, c'est-à-dire

$$\forall x_1, x_2 \in A \quad \forall \alpha \in [0, 1] \quad f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2).$$

REMARQUE 25 — Si  $A$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , tous les points de l'arc  $M_1M_2$  sont situés sous la corde  $[M_1M_2]$



### 1.1.6 Distance à une partie

DÉFINITION 26

Si  $X$  est une partie non vide quelconque de  $(E, \|\cdot\|)$  et  $a \in E$ , alors on appelle distance de  $a$  à  $X$  le réel positif  $d(a, X) = \inf_{x \in X} \|a - x\|$ .

REMARQUE 27 —

1. L'ensemble  $\{\|a - x\|, x \in X\}$  est un ensemble non vide, car  $X$  est non vide et qui est minoré par 0, donc la distance existe.
2. Par définition de la borne inférieure, il existe une suite  $(x_n)_{n \geq 0} \in X^{\mathbb{N}}$  telle que  $(d(a, x_n))_{n \geq 0}$  tend vers  $d(a, X)$ .  
Mais la suite  $(x_n)$  ne converge pas nécessairement !

PROPOSITION 28

Soit  $X$  une partie non vide de  $E$ . L'application  $E \rightarrow \mathbb{R}_+, a \mapsto d(a, X)$  est 1-lipschitzienne.

**Preuve** — On veut montrer que pour tout  $a, b \in E$ ,  $|d(a, X) - d(b, X)| \leq \|a - b\|$ .  
On sait que pour tout  $x \in X$  (inégalité triangulaire),

$$d(a, X) \leq \|a - x\| \leq \|a - b\| + \|b - x\|$$

Par définition de la borne inférieure,

$$d(a, X) \leq \|a - b\| + d(b, X).$$

On en déduit que

$$d(a, X) - d(b, X) \leq \|a - b\|.$$

On intervertit le rôle de  $a$  et  $b$  et on obtient le résultat attendu ! □

PROPOSITION 29

Montrer que si  $X$  est partie convexe de  $E$ , alors  $a \mapsto d(a, X)$  est convexe.

**Preuve** — Si  $X$  est convexe, alors  $\forall a, b \in E, \forall x, y \in X, \forall t \in [0, 1]$

$$tx + (1 - t)y \in X \text{ et } \|ta + (1 - t)b - (tx + (1 - t)y)\| \leq t\|a - x\| + (1 - t)\|b - y\|$$

donc

$$d(ta + (1 - t)b, X) \leq t\|a - x\| + (1 - t)\|b - y\|$$

ce qui montre que  $d(ta + (1 - t)b, X) \leq td(a, X) + (1 - t)d(b, X)$ , la fonction est bien convexe. □

## 1.2 TOPOLOGIE DANS UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ

### 1.2.1 Parties ouvertes, fermées

DÉFINITION 30

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé,  $a \in E$  et  $r > 0$  un réel. On dit que

1. l'ensemble  $\mathcal{B}(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\}$  est la boule ouverte de centre  $a$  et de rayon  $r$ .
2. L'ensemble  $\mathcal{B}_F(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| \leq r\}$  est la boule fermée de centre  $a$  et de rayon  $r$ .
3. L'ensemble  $\mathcal{S}(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| = r\}$  est la sphère de centre  $a$  et de rayon  $r$ .

DÉFINITION 31

(Parties ouvertes) Une partie  $U$  de  $(E, \|\cdot\|)$  est un ouvert de  $E$  si pour tout point  $a \in U$ , il existe un  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$  tel que la boule ouverte  $B(a, \varepsilon) \subset U$ .

REMARQUE 32 — 1. L'ensemble vide et  $E$  sont des ouverts.

2. Les intervalles ouverts de  $\mathbb{R}$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}$  pour la valeur absolue.
3. Les boules ouvertes sont des ouverts.



4. Si  $E = E_1 \times E_2$  un produit d'espaces vectoriels normé, alors

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(a, r) &= \{x \in E, \|x - a\| < r\} \\ &= \{x_1 \in E_1, \|x_1 - a_1\|_1 < r\} \times \{x_2 \in E_2, \|x_2 - a_2\| < r\} \\ &= \mathcal{B}(a_1, r) \times \mathcal{B}(a_2, r) \end{aligned}$$

PROPOSITION 33

Une union quelconque d'ouverts est un ouvert et une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

**Preuve** — Soit  $(U_i)_{i \in A}$ , une famille d'ouverts de  $E$  indexée par  $A$ . Alors pour tout  $a \in \bigcup_{i \in A} U_i$ , il existe  $i_0 \in A$  tel que  $a \in U_{i_0}$  ouvert et donc il existe  $r$  tel que  $\mathcal{B}(a, r) \subset U_{i_0} \subset U$  et  $U$  est bien un ouvert.

Soit  $(U_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  une famille finie d'ouverts et  $V = \bigcap_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} U_i$ . Pour tout  $a \in V$ , pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , il existe  $r_i$  tel que  $\mathcal{B}(a, r_i) \subset U_i$  car  $U_i$  est un ouvert. On pose  $r = \inf_{\llbracket 1, n \rrbracket} r_i$  qui est un réel non nul car vaut l'un des  $r_i$  et par construction,  $\mathcal{B}(a, r) \subset V$ . □

PROPOSITION 34

Dans un espace produit, un produit d'ouverts est un ouvert.

**Preuve** — On sait qu'une boule ouverte dans l'espace produit est un produit de boules ouvertes. □

DÉFINITION 35

Soit  $a \in E$ . On dit qu'une partie  $X$  est un voisinage de  $a$  s'il existe une boule ouverte  $\mathcal{B}(a, \rho)$ ,  $\rho > 0$ , tel que  $\mathcal{B}(a, \rho) \subset X$ .

DÉFINITION 36

Une partie  $W$  de  $(E, \|\cdot\|)$  est un fermé de  $E$  si  $E \setminus W$  est un ouvert.

EXEMPLE 37 —

1. L'ensemble vide et  $E$  sont des fermés.
2. Les intervalles fermés de  $\mathbb{R}$  sont des fermés de  $\mathbb{R}$  pour la valeur absolue.
3. Les boules fermées sont des fermés. Les sphères sont des fermés.

PROPOSITION 38

Une intersection quelconque de fermés est un fermé et une union finie de fermés est un fermé.

**Preuve** — Le passage au complémentaire change les unions en intersections et inversement, et la propriété correspondante est vraie pour les ouverts. □

REMARQUE 39 — Un singleton est un fermé, donc tout ensemble fini de points est un fermé.

## 1.2.2 Topologie

DÉFINITION 40

(Point intérieur) Soit  $X$  une partie de  $(E, \|\cdot\|)$  et  $a \in E$ . On dit que  $a \in X$  est intérieur à  $X$  s'il existe  $r > 0$  tel que  $\mathcal{B}(a, r) \subset X$ . L'intérieur de  $X$ , noté  $\overset{\circ}{X}$ , est l'ensemble des points intérieurs à  $X$ .

REMARQUE 41 — Un ouvert est un voisinage de chacun de ses points.

PROPOSITION 42

Une partie  $X$  de  $E$  est un ouvert ssi tout point de  $x \in X$  est intérieur à  $X$ .

DÉFINITION 43

(Point adhérent, adhérence, frontière) Soit  $X \subset E$  et  $a \in E$ .

1. On dit que  $a$  est un point adhérent de  $X$  si  $\forall \rho > 0, \mathcal{B}(a, \rho) \cap X \neq \emptyset$ .
2. L'ensemble des points adhérents à  $X$  s'appelle adhérence de  $X$  et est notée  $\overline{X}$ .
3. L'ensemble  $\text{Fr}(X) = \overline{X} \setminus \overset{\circ}{X} = \overline{X} \cap (\overset{\circ}{X})^c$  s'appelle la frontière de  $X$ .

REMARQUE 44 — L'adhérence  $\overline{X}$  de  $X$  contient  $X$ . L'adhérence d'un intervalle est un intervalle fermé. Un point adhérent à une partie n'appartient pas nécessairement à la partie elle-même.

PROPOSITION 45

L'adhérence  $\overline{X}$  de  $X$  est un fermé. La frontière de  $X$  est un fermé.

**Preuve** — On montre que le complémentaire est un ouvert : si  $a \notin \overline{X}$ , alors il existe  $\rho > 0$  tel que  $\mathcal{B}(a, \rho) \cap X = \emptyset$ . On en déduit que  $\mathcal{B}(a, \rho)$  est incluse dans le complémentaire de  $\overline{X}$  puisque pour tout  $b \in \mathcal{B}(a, \rho)$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\mathcal{B}(b, \varepsilon) \subset \mathcal{B}(a, \rho)$  et donc  $\mathcal{B}(b, \varepsilon) \cap X = \emptyset$ , ce qui implique  $b \notin \overline{X}$   $\square$

COROLLAIRE 46

$X$  est un fermé ssi  $X = \overline{X}$ .

**Preuve** — Il reste à prouver que si  $X$  est fermé, alors  $X = \overline{X}$  : On a  $\overline{X} = X \cup \text{Fr}(X)$ . Supposons qu'il existe  $x \in \overline{X} \setminus X$ , alors  $\forall \rho > 0, \mathcal{B}(x, \rho) \cap X \neq \emptyset$  et ce  $x$  contredit que le complémentaire de  $X$  est un ouvert. Donc  $\overline{X} \setminus X = \emptyset$ , ce que nous voulions.  $\square$

PROPOSITION 47

$\overline{X}$  est le plus petit fermé qui contient  $X$  et  $\overset{\circ}{X}$  est le grand ouvert contenu dans  $X$ .

REMARQUE 48 — En particulier,  $(\overset{\circ}{X})^c = \overline{X^c}$  où  $A^c$  est le complémentaire de  $A$ .

PROPOSITION 49

Une partie non vide de  $(E, \|\cdot\|)$  est bornée ssi il existe une boule  $\mathcal{B}(a, r)$  telle que  $A \subset \mathcal{B}(a, r)$ .

PROPOSITION 50

Une boule  $\mathcal{B}(a, r)$  de  $(E, \|\cdot\|)$  est une partie convexe.

**Preuve** — Soit  $x, y \in \mathcal{B}(a, r)$ , alors

$$\forall t \in [0, 1], \|tx + (1-t)y - a\| = \|t(x-a) + (1-t)(y-a)\| \leq t\|x-a\| + (1-t)\|y-a\| \leq r$$

Ce qui montre que  $tx + (1-t)y \in \mathcal{B}(a, r)$ .  $\square$

### 1.2.3 Topologie et suites

#### § 1. Rappels

DÉFINITION 51

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. Une suite d'éléments de  $E$   $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l \in E$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \|u_n - l\| \leq \varepsilon.$$

On dira qu'une suite est convergente, s'il existe  $l \in E$  tel que  $u$  converge vers  $l$ . Si une suite  $u$  n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente.

DÉFINITION 52

Soit  $(u_n)$  une suite d'éléments de  $E$  et  $\rho : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  une application strictement croissante. On dit que la suite  $(u_{\rho(n)})$  est une suite extraite de  $(u_n)$ . L'application  $\rho$  s'appelle extractrice.

PROPOSITION 53

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé.

1. Une suite convergente est bornée.
2. Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.

DÉFINITION 54

On appelle valeur d'adhérence de la suite  $(u_n)$  un vecteur  $a \in E$  tel qu'il existe une suite extraite  $(u_{\rho(n)})$  qui converge vers  $a$ .

EXEMPLE 55 —

1. Si la suite  $(u_n)$  converge vers  $l$ , quelles sont ses valeurs d'adhérence ?
2. Une suite  $(u_n)$  a-t-elle nécessairement une valeur d'adhérence ?
3. Si  $(u_n)$  a une unique valeur d'adhérence, la suite est-elle convergente ?
4. Une suite peut-elle avoir une infinité de valeurs d'adhérence ?

### 1.2.4 Caractérisation par les suites.

THÉORÈME 56

(Caractérisation séquentielle de l'adhérence) Un point  $x \in E$  appartient à  $\overline{X}$  ssi il existe une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $X$  qui converge vers  $x$ .

**Preuve**  $\Rightarrow$  : Si  $x \in \overline{X}$ , alors  $\forall n \in \mathbb{N}$ , il existe  $x_n \in \mathcal{B}(x, \frac{1}{n}) \cap X$ , et la suite  $(x_n)$  converge par construction vers  $x$ .

$\Leftarrow$  : Si existe une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $X$  qui converge vers  $x$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $x_n$  tel que  $\|x_n - x\| < \varepsilon$ , mais alors  $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$  et par définition  $x \in \overline{X}$ . □

COROLLAIRE 57

(Caractérisation séquentielle d'un fermé) Une partie  $X \subset E$  est un fermé ssi pour toute suite  $(x_n)$  d'éléments de  $X$  qui converge dans  $E$  alors sa limite est encore dans  $X$ .

**Preuve** — On sait que  $X$  est fermé ssi  $X = \overline{X}$ . De plus, la proposition nous dit que  $\overline{X}$  est l'ensemble des  $x \in E$  qui sont limites d'une suite d'éléments de  $X$ . On en déduit le résultat. □

EXEMPLE 58 —

1. Dans un espace produit, un produit de fermés est un fermé.
2. L'adhérence d'une boule ouverte est une boule fermée.

PROPOSITION 59

1. Si  $X \subset Y$ , alors  $\overline{X} \subset \overline{Y}$
2.  $x \in \overline{X}$  ssi  $d(x, X) = 0$ .

DÉFINITION 60

(Parties denses) On dit qu'une partie  $X \subset E$  est dense si  $\overline{X} = E$ .

EXEMPLE 61 —  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

### 1.2.5 Comparaison de normes

DÉFINITION 62

Soient  $N$  et  $\|\cdot\|$  deux normes sur un espace vectoriel  $E$ . On dit que ces normes sont **équivalentes** s'il existe deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que

$$\forall x \in E, \quad N(x) \leq \alpha \cdot \|x\| \quad \text{et} \quad \|x\| \leq \beta \cdot N(x).$$

REMARQUE 63 — La relation est symétrique, réflexive et transitive. On cherchera souvent le plus grand  $\alpha$  et le plus petit  $\beta$  qui vérifient l'inégalité ci-dessus, cela permet de mesurer combien les normes sont différentes.

EXEMPLE 64 — Sur  $\mathbb{R}^n$ , les normes  $\| \cdot \|_1$ ,  $\| \cdot \|_2$  et  $\| \cdot \|_\infty$  vérifient

$$\begin{aligned} \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty &\leq \|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n| \leq n \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty \\ \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty &\leq \|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} \leq \sqrt{n} \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty \end{aligned}$$

donc elles sont toutes les trois équivalentes.

PROPOSITION 65

Si deux normes  $N$  et  $\| \cdot \|$  sont équivalentes, alors une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $l$  pour la norme  $N$  ssi elle converge vers  $l$  pour la norme  $\| \cdot \|$ .

**Preuve** — Soit  $\varepsilon > 0$ . On garde les notations de la définition des normes équivalentes. On écrit la définition de la convergence pour la norme  $N$  :

$$\exists N \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow N(u_n - l) \leq \frac{\varepsilon}{\beta}$$

et comme  $\|u_n - l\| \leq \beta N(u_n - l) \leq \alpha \varepsilon$ , on obtient

$$n > N \Rightarrow \|u_n - l\| \leq \varepsilon.$$

La réciproque se montre de la même manière. □

REMARQUE 66 — Deux normes équivalentes définissent la même notion de convergence. Vous pouvez aussi montrer qu'un ouvert pour une norme est aussi un ouvert pour l'autre norme.

THÉORÈME 67

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

**Preuve** — L'idée consiste à prouver le résultat pour  $\mathbb{K}^n$  et pour cela, on montre qu'une norme quelconque sur  $\mathbb{K}^n$  est équivalente à  $\| \cdot \|_\infty$ .

La majoration facile : si  $N$  une norme sur  $\mathbb{K}^n$  de base canonique  $(e_1, \dots, e_n)$ , on a

$$N(x) = N\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \leq \sum_{i=1}^n |x_i| N(e_i) \leq \|x\|_\infty \sum_{i=1}^n N(e_i).$$

L'inégalité dans l'autre sens est un peu plus subtile, nous aurons besoin de la compacité. □

REMARQUE 68 — Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les notions d'ouverts, de fermés, de limite coïncident quelque soit la norme. Encore une fois, ce n'est pas le cas en dimension infinie comme le montre l'exemple ci-dessous.

EXEMPLE 69 — Soit  $a < b$  des réels et  $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$  et les normes  $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$ ,  $\|f\|_1 =$

$$\int_a^b |f(t)| dt \text{ et } \|f\|_\infty = \sup_{[a, b]} |f(t)|.$$

On vérifie facilement que

$$\|f\|_1 \leq (b-a) \times \|f\|_\infty \quad \text{et} \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} \leq \sqrt{b-a} \times \|f\|_\infty$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b 1 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b-a} \times \|f\|_2$$

La suite  $f_n : x \mapsto \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n$  vérifie

$$\|f_n\|_1 = (b-a) \int_0^1 u^n du = \frac{(b-a)}{n+1}, \quad \|f_n\|_2 = \sqrt{\|f_n\|_1} = \frac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{2n+1}} \quad \text{et} \quad \|f_n\|_\infty = 1$$

dont on déduit que  $\lim_n \frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_1} = \lim_n \frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = \lim_n \frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_2} = +\infty$  ce qui montre que les normes  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  ne sont pas équivalentes entre elles.

Notons que la convergence uniforme implique la convergence en moyenne quadratique qui implique la convergence en moyenne.

PROPOSITION 70

Soit  $E$  de dimension finie rapporté à la base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$  et  $(u_n)_{n \geq 0} \in E^{\mathbb{N}}$ . On pose  $(x_n^1, \dots, x_n^m)$  les coordonnées de  $u_n$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $l = (l_1, \dots, l_m)$  ssi pour tout  $k \in \{1, \dots, m\}$ , les suites  $(x_n^k)_{n \geq 0}$  convergent vers  $l_k$ .

**Preuve** — Considérons la norme sup sur  $E$  (toutes les normes en dimension finie sont équivalentes!) :  $\|(x_1, \dots, x_m)\|_\infty = \sup_i |x_i|$ .

$\Rightarrow$  : La suite  $(u_n)$  converge pour cette norme,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow \|u_n - l\|_\infty < \varepsilon \Rightarrow \forall k \in \{1, \dots, m\}, |x_n^k - l_k| \leq \varepsilon$$

et les suites  $(x_n^k)_{n \geq 0}$  convergent vers  $l_k$ .

$\Leftarrow$  :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall k \in \{1, \dots, m\}, \exists N_k \in \mathbb{N}, n > N_k \Rightarrow |x_n^k - l_k| \leq \varepsilon$$

Pour  $N = \max\{N_1, \dots, N_m\}$ ,  $n > N$  implique  $\|u_n - l\|_\infty \leq \varepsilon$ . □

COROLLAIRE 71

Soit  $E$  de dimension finie et soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $E$ . Si  $(u_n)_{n \geq 0} \in E^{\mathbb{N}}$  est telle que  $\left(\sum_{k=0}^n \|u_k\|\right)$  converge,

alors  $\left(\sum_{k=0}^n u_k\right)_{n \geq 0}$  converge.

**Preuve** — Comme sur un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, on peut supposer que  $\|\cdot\|$  est la norme infinie et alors il est clair que pour tout  $k \in \{1, \dots, m\}$ , la série  $\left(\sum_{l \geq 0} |x_l^k|\right)$  converge et donc  $\left(\sum_{l \geq 0} x_l^k\right)$  aussi. La proposition permet de conclure. □

### 1.2.6 Topologie induite

DÉFINITION 72

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé et  $A \subset E$  une partie de  $E$ . On appelle

1. ouvert relatif de  $A$  tout ensemble de la forme  $U \cap A$  où  $U$  est un ouvert de  $E$ .
2. fermé relatif de  $A$  tout ensemble de la forme  $F \cap A$  où  $F$  est un fermé de  $E$ .
3. voisinage de  $a \in E$  relatif à  $A$  tout ensemble de la forme  $V \cap A$  où  $V$  est un voisinage de  $a$  dans  $E$ .

PROPOSITION 73

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé et  $A \subset E$  une partie de  $E$ .

1.  $X \subset A$  est un ouvert relatif de  $A$  ssi  $C_A X$  est un fermé relatif de  $A$ .
2.  $X \subset A$  est un fermé relatif de  $A$  ssi toute suite de  $X^{\mathbb{N}}$  qui converge dans  $A$  a sa limite dans  $X$ .

REMARQUE 74 —

1. Si  $X$  est un fermé relatif de  $A$ , alors  $X = A \cap F$  avec  $F$  fermé. En particulier,  $X \subset F$ . Donc  $\overline{X} \subset F$  puisque l'adhérence est le plus petit fermé contenant  $X$ . On en déduit  $X = A \cap \overline{X}$ .
2. Si  $X$  est un fermé relatif de  $\overline{A}$ ,  $X$  n'est pas nécessairement un fermé de  $E$ . Mais si  $A$  est fermé, alors  $\overline{X} \subset A$ , et donc  $X = \overline{X}$ , c'est-à-dire  $X$  est un fermé.
3. De même, si  $A$  est ouvert, alors tout ouvert relatif  $X$  de  $A$  s'écrit  $X = A \cap U$ , avec  $U$  ouvert de  $E$ , mais l'intersection de deux ouverts est ouvert,  $A$  est aussi un ouvert de  $A$ .

## 1.3 CONTINUITÉ

On considère ici  $(E, \|\cdot\|)$  et  $(F, N)$  deux  $\mathbb{K}$ -espace vectoriels normés,  $A \subset E$  une partie non vide et  $f : A \rightarrow F$ .

## 1.3.1 Définitions

DÉFINITION 75

Soit  $f : A \rightarrow F$  et  $a$  un point adhérent à  $A$ .

1. On dit que  $f$  admet pour limite  $b \in F$  en  $a$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, \|x - a\| \leq \delta \Rightarrow N(f(x) - b) \leq \varepsilon$$

et on note  $\lim_a f = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f = b$ .

2. Si  $a \in A$  et  $f$  admet pour limite  $b$  en  $a$ , alors on dit que  $f$  est continue en  $a$  et  $f(a) = b$ .  
3. Si  $f$  est continue en tout point de  $A$ , on dit que  $f$  est continue sur  $A$  et on note  $f \in \mathcal{C}^0(A, F)$ .

REMARQUE 76 — Si on remplace  $\|\cdot\|$  ou  $N$  par une norme équivalente, la notion de limite ne change pas. En dimension finie, on pourra donc choisir la norme qui nous arrange le plus.

REMARQUE 77 — On peut aussi définir  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty, x \in A} f(x) = b$  : on choisit  $A \subset E$  non bornée et alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, \|x\| \geq \delta \Rightarrow N(f(x) - b) \leq \varepsilon$$

DÉFINITION 78

Une application  $f : A \rightarrow F$  est lipschitzienne sur  $A$  si

$$\exists k > 0, \forall (x, y) \in A^2, N(f(x) - f(y)) \leq k\|x - y\|.$$

On dit alors que  $f$  est  $k$ -lipschitzienne. Si  $0 < k < 1$ , on dit que  $f$  est contractante.

PROPOSITION 79

Une application lipschitzienne est continue sur  $A$ .

**Preuve** — Prendre  $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$  dans la définition. □

COROLLAIRE 80

L'application  $\text{Id}_E : E \rightarrow E$  est continue.

REMARQUE 81 — Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ , alors pour tout  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda b + \mu b'$ .  
Si  $h : F \rightarrow G$  admet une limite  $c$  en  $b$  de sorte que  $h \circ f$  est bien définie, alors  $\lim_{x \rightarrow a} h \circ f(x) = c$ .

En particulier,  $\mathcal{C}^0(A, F)$  a une structure de  $\mathbb{K}$  espace vectoriel.

$\mathcal{C}^0(A, \mathbb{K})$  a une structure d'algèbre, la multiplication de fonctions étant alors bien définie.

PROPOSITION 82

Si  $F$  est un espace vectoriel de dimension finie de base  $(e_1, \dots, e_p)$ , et  $\varphi : A \rightarrow F$ ,  $\varphi(x) = \sum_{i=1}^p \varphi_i(x)e_i$ .

Alors  $\varphi$  admet une limite  $l = (l_1, \dots, l_p)$  en  $a$  ssi pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$   $\varphi_i : A \rightarrow \mathbb{K}$  admet pour limite  $l_i$  en  $a$ .

**Preuve** — On choisit encore la norme  $N = \|\cdot\|_\infty$  sur  $F$  relativement à la base  $(e_1, \dots, e_p)$ . Et la preuve ne pose aucun problème. □

## COROLLAIRE 83

L'application  $\varphi$  est continue sur  $A$  ssi les applications coordonnées  $\varphi_i$  le sont.

## EXEMPLE 84 —

1. *Fonction polynomiale* : Une application  $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$  de la forme

$$(x_1, \dots, x_p) \mapsto \sum_{(i_1, \dots, i_p) \in J} a_{i_1, \dots, i_p} x_1^{i_1} \cdots x_p^{i_p}$$

l'ensemble  $J$  comprenant un nombre fini de  $p$ -uplets s'appelle fonction polynomiale.

Il résulte de la proposition précédente que les fonctions polynomiales sont continues sur  $\mathbb{K}^n$ .

2. *Fonction rationnelle* : Une application  $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$  de la forme

$$(x_1, \dots, x_p) \mapsto \frac{P}{Q}$$

avec  $P$  et  $Q$  des applications polynomiales s'appelle fonction rationnelle (à plusieurs variables).

Il résulte de la proposition précédente que les fonctions rationnelles sont continues en tout point  $x$  où  $Q(x) \neq 0$ .

3.  $f : (x, y) \mapsto \cos \frac{1 + xy}{1 + x^2 + y^4}$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

## THÉORÈME 85

(Théorème du point fixe) Soit  $A \subset E$  une partie fermée de  $E$  et  $f : A \rightarrow A$  une application  $k$ -lipschitzienne avec  $k < 1$  ( $f$  est contractante). Alors  $f$  admet au plus un point fixe.

Si de plus  $E$  est dimension finie, alors  $f$  admet un unique point fixe  $l$  et toute suite  $(x_n)$  définie par  $x_0 \in A$ ,  $x_{n+1} = f(x_n)$  converge vers  $l$ .

**Preuve** — L'unicité du point fixe se fait comme d'habitude : si  $l$  et  $l'$  sont deux points fixes, alors  $f$  contractante implique que  $\|l - l'\| \leq k\|l - l'\|$  donc  $l = l'$  puisque  $k < 1$ . De plus, pour tout  $n$ ,  $\|x_{n+1} - x_n\| \leq k\|x_n - x_{n-1}\|$ , d'où  $\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\|$  qui est le terme général d'une série géométrique convergente, donc  $x_{n+1} - x_n$  est le terme général d'une série normalement convergente, donc convergente. Enfin sa somme partielle est  $x_{n+1} - x_0$ , donc  $(x_n)$  converge vers  $l$  et comme  $A$  est fermé,  $l \in A$ . De plus,  $l$  est un point fixe de  $f$  puisque

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(l)$$

$f$  étant continue. □

## 1.3.2 Caractérisations

## § 1. Par les suites

## PROPOSITION 86

Une application  $f : A \rightarrow F$  admet une limite  $b$  en  $a$ , ssi pour toute suite  $(u_n)$  dans  $A$  qui converge vers  $a \in E$ , la suite  $(f(u_n))$  converge vers  $b$ .

**Preuve** — Supposons que  $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f = b$  : Pour  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta$  tel que  $x \in D$  et  $\|x - a\| \leq \delta \Rightarrow N(f(x) - b) \leq \varepsilon$ , puis que  $f$  admet une limite en  $a$ .

Maintenant traduisons que  $(u_n)$  tend vers  $a$  :  $\exists M$  tel que pour  $n \geq M$ ,  $\|u_n - a\| \leq \delta$ , et alors  $N(f(u_n) - b) \leq \varepsilon$ . Ce qui montre que  $u_n$  tend vers  $a$ .

Réciproquement, si  $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f \neq b$  : on comprend que la limite n'est pas  $b$  et peut-être même n'existe pas : on sait juste que

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in A, \|x - a\| \leq \delta \text{ et } N(f(x) - b) > \varepsilon.$$

On pose  $\delta = \frac{1}{n}$ , et on obtient l'existence d'une suite  $(x_n)_{n > 0}$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\|x_n - a\| \leq \frac{1}{n}$  et  $N(f(x_n) - b) > \varepsilon$ , ce qui contredit l'hypothèse. □

## COROLLAIRE 87

$f$  est continue en  $a$ , ssi pour toute suite  $(u_n)$  dans  $A$  qui converge vers  $a$ , la suite  $(f(u_n))$  converge vers  $f(a)$

## PROPOSITION 88

Si  $f : E \rightarrow F$  est continue et  $X \subset E$ . Alors  $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$ .

**Preuve** — Tout point de  $x \in \overline{X}$  est limite d'une suite  $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ . Comme  $f$  est continue  $f(x)$  est la limite de la suite  $(f(x_n)) \in f(X)^{\mathbb{N}}$ , et donc  $f(x) \in \overline{f(X)}$ .  $\square$

## COROLLAIRE 89

L'image d'une partie dense par une application continue est dense dans l'image :  $f : E \rightarrow F$  et  $\Omega \subset E$  dense dans  $E$ , alors  $\overline{f(\Omega)} = \overline{f(E)}$  où l'on prend l'adhérence pour la topologie induite sur  $f(E)$ .

EXEMPLE 90 — On sait que le groupe  $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$  est un sous groupe de  $\mathbb{R}$ . Il est soit de la forme  $\alpha\mathbb{Z}$ , soit dense dans  $\mathbb{R}$ .

Si  $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} = \alpha\mathbb{Z}$ , alors  $1 \in \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} = \alpha\mathbb{Z}$ , donc il existe  $m \in \mathbb{Z}$  tel que  $1 = \alpha m$  et  $\alpha = \frac{1}{m}$  est un rationnel. On a aussi  $\pi \in \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} = \alpha\mathbb{Z}$ , donc il existe  $p \in \mathbb{Z}$  tel que  $2\pi = \alpha p = \frac{m}{p}$ . Mais on sait que  $\pi$  est irrationnel, donc c'est absurde. On en déduit que  $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

De plus, la fonction  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  est continue et surjective. Le corollaire nous dit que l'image  $\cos(\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z})$  est dense dans  $[-1, 1]$ .

Mais on remarque que

$$\begin{aligned} \cos(\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}) &= \{\cos(n + 2\pi m), n, m \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\cos n, n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\cos n, n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

On a montré que  $\{\cos n, n \in \mathbb{N}\}$  est dense dans  $[-1, 1]$

## § 2. Par les images réciproques

## PROPOSITION 91

Soit  $f : A \rightarrow F$ . La fonction  $f$  est continue sur  $A$

1. ssi pour tout ouvert  $U$  de  $F$ ,  $f^{-1}(U)$  est ouvert.
2. ssi pour tout fermé  $W$  de  $F$ ,  $f^{-1}(W)$  est un fermé.

**Preuve** — On prouve la proposition pour les fermés, et par passage au complémentaire, on en déduit la propriété pour les ouverts. On utilise la caractérisation des fermés par les suites.

Supposons  $f$  continue et  $W$  fermé de  $F$  : soit  $(x_n)$  une suite d'éléments de  $f^{-1}(W)$  qui converge vers  $l$ , alors son image par  $f$ ,  $(f(x_n) = y_n)$  converge vers  $f(l)$  par continuité de  $f$  et  $f(l)$  appartient à  $W$  comme limite d'éléments de  $W$  fermé. On en déduit que  $l \in f^{-1}(f(l)) \subset f^{-1}(W)$ , et par caractérisation d'un fermé par les suites,  $f^{-1}(W)$  est fermé.

Réciproquement : si  $f : E \rightarrow F$  vérifie pour tout ouvert  $U$ ,  $f^{-1}(U)$  est un ouvert, alors  $f$  est continue sur  $E$  : soit  $a \in E$ , et  $\mathcal{B}(f(a), \varepsilon)$  la boule de centre  $f(a)$  et de rayon  $\varepsilon$ , alors  $f^{-1}(\mathcal{B}(f(a), \varepsilon))$  est un ouvert et donc il existe  $\delta > 0$  tel que  $\mathcal{B}(a, \delta) \subset f^{-1}(\mathcal{B}(f(a), \varepsilon))$ , ce qui est exactement la définition de la continuité en  $a$  de  $f$ .  $\square$

EXEMPLE 92 — Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, alors pour tout  $l \in \mathbb{R}$

$$f^{-1}(l) = \{x \in E \mid f(x) = l\}$$

est un fermé de  $E$ . Si  $E$  est de dimension 2, on dit que c'est une courbe de niveau, si  $E$  est de dimension 3 c'est une surface de niveau.

## PROPOSITION 93

Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  continue, alors pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

1.  $\{x \in E \mid f(x) \geq \alpha\}$  est un fermé.
2.  $\{x \in E \mid f(x) > \alpha\}$  est un ouvert.

**Preuve** — il suffit de prouver l'assertion sur les fermés, car sinon, on remplace  $f$  par  $-f$  et on passe au complémentaire. On utilise encore la caractérisation des fermés par les suites : Si  $(x_n)$  une suite qui converge vers  $l$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $f(x_n) \geq \alpha$ , alors  $f(l) \geq \alpha$ .  $\square$



## § 3. Pour les applications linéaires

EXEMPLE 94 — Soit  $E = \mathbb{K}[X]$  muni de la norme :

$$P = \sum_{k=0}^d a_k X^k, \quad \|P\| = \left( \sum_{k=0}^d a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit l'opérateur  $\mathcal{D} : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$ ,  $P \mapsto P'$  et soit la suite  $P_n = \frac{X^n}{n}$  qui converge vers 0 puisque  $\|P_n\| = \frac{1}{n}$ . Or la suite  $(\mathcal{D}(P_n))$  est la suite  $(X^{n-1})_{n \geq 1}$  qui est divergente. On en déduit que l'opérateur de dérivation n'est pas continu.

Ceci montre qu'une application linéaire n'est pas toujours continue ! Mais en dimension finie, ce sera le cas.

## THÉORÈME 95

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  où  $(E, \|\cdot\|)$  et  $(F, N)$  sont des espaces vectoriels normés. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est continue en 0.
2.  $f$  est continue sur  $E$ .
3.  $f$  est bornée sur la boule fermée (ou la sphère) unité.
4.  $f$  est lipschitzienne.

**Preuve** — 1/  $\Rightarrow$  2/ : Si  $f$  est continue en 0, alors  $\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = 0$ , donc pour tout  $x \in E$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x) + f(h) = f(x)$  et  $f$  est continue en  $x$ ,  $f$  est continue sur  $E$ .

2/  $\Rightarrow$  3/ : Si  $f$  est continue sur  $E$ , elle l'est en particulier en 0 et pour  $\varepsilon = 1$  :

$$\exists \delta > 0, \|x\| \leq \delta \Rightarrow N(f(x)) \leq 1$$

Si  $x \neq 0$ ,  $\|x\| \leq 1$ , alors  $\|\delta x\| \leq \delta$  et  $N(f(\delta x)) \leq 1$ . Ce qui montre que  $N(f(x)) \leq \frac{1}{\delta}$  et  $f$  est bien bornée sur la boule fermée (et donc sur la sphère) unité.

3/  $\Rightarrow$  4/ : Si  $f$  est bornée sur la sphère unité, alors il existe  $M > 0$  tel que  $\forall x \in \mathcal{S}(0, 1)$ ,  $N(f(x)) \leq M$ , et par linéarité de  $f$  et homogénéité de la norme, on a pour tout  $x \in E \setminus \{0\}$ ,  $N(f(\frac{x}{\|x\|})) \leq M$  et donc  $N(f(x)) \leq M\|x\|$ , ce qui montre que  $f$  est  $M$ -lipschitzienne et donc continue.

4/  $\Rightarrow$  1/ : est déjà connu. □

## THÉORÈME 96

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  surjective où  $(E, \|\cdot\|)$  et  $(F, N)$  sont des espaces vectoriels normés. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est un homéomorphisme de  $E$  sur  $F$ .
2. Il existe des constantes réelles strictement positives  $\alpha$  et  $\beta$  telles que

$$\forall x \in E, \alpha\|x\| \leq N(f(x)) \leq \beta\|x\|.$$

**Preuve** — Rappelons qu'un homéomorphisme est une application continue, bijective et de réciproque continue.

$f$  est injective, car si  $N(f(x)) = 0$ , alors  $0 \geq \alpha\|x\|$  implique  $\|x\| = 0$ , puisque  $\alpha > 0$ . Donc  $f$  est bijective.

On sait que si  $f$  linéaire bijective, alors  $f^{-1}$  est linéaire. Pour montrer que  $f$  ou  $f^{-1}$  est continue, il faut et il suffit de montrer qu'elles sont bornées sur la boule unité.

L'inégalité de droite, montre que l'image de la boule unité par  $f$  est majorée par  $\beta$  et celle de gauche que l'image de la boule unité par  $f^{-1}$  est majorée par  $\frac{1}{\alpha}$ .

Réciproquement, si l'image de la boule unité par  $f$  est majorée par  $\beta$  alors l'inégalité de droite est vérifiée et si l'image de la boule unité par  $f^{-1}$  est majorée par  $\frac{1}{\alpha}$ , alors l'inégalité de gauche est vérifiée. □

## COROLLAIRE 97

L'application identité  $Id_E$  de  $(E, \|\cdot\|)$  dans  $(E, N)$  est un homéomorphisme ssi les normes sont équivalentes.

REMARQUE 98 — Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie rapporté à une base  $(e_1, \dots, e_n)$  et soit  $\|\cdot\|_\infty$  la norme sup rapporté à cette base. Alors l'application  $\varphi : (E, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ ,  $x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \mapsto (x_1, \dots, x_n)$  est un homéomorphisme puisque par définition la norme est conservée.

### 1.3.3 Uniforme continuité

La continuité est une propriété locale, il suffit de la montrer en tout point pour qu'elle soit vraie partout. L'uniforme continuité est une notion globale :

DÉFINITION 99

Soit  $f : A \rightarrow F$  est uniformément continue sur  $A$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in A, \|x - y\| \leq \delta \Rightarrow N(f(x) - f(y)) \leq \varepsilon.$$

REMARQUE 100 — Le choix de  $\delta$  ne dépend pas de  $x$  et  $y$  comme dans la définition de la continuité en un point

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_a > 0, \forall x \in A, \|x - a\| \leq \delta_a \Rightarrow N(f(x) - b) \leq \varepsilon$$

EXEMPLE 101 — Toute application lipschitzienne est uniformément continue.

PROPOSITION 102

Une application uniformément continue est continue.

REMARQUE 103 — L'uniforme continuité nous servira pour montrer des théorèmes d'approximations (Weierstrass algébrique, géométrique)

### 1.3.4 Continuité et densité

PROPOSITION 104

Soit  $f, g : E \rightarrow F$  deux applications continues de  $E$  dans  $F$  des espaces vectoriels normés. On suppose que  $f$  et  $g$  coïncident sur une partie dense  $\Omega$  de  $E$  :

$$\forall x \in \Omega, f(x) = g(x).$$

Alors  $f$  et  $g$  sont égales sur  $E$ .

**Preuve** — L'ensemble  $X$  des points  $x \in E$  tels que  $f(x) - g(x) = 0_F$  est un fermé comme image réciproque de  $\{0\}$  par une application continue. De plus,  $X$  contient  $\Omega$  une partie dense, donc  $E = \overline{\Omega} \subset X$ , ce qui montre que  $f$  et  $g$  sont égales.  $\square$

EXEMPLE 105 —

1. Montrer que si  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  alors

$$\left( \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 f(x + y) = f(x) + f(y) \right) \iff \left( \exists a \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} f(x) = ax \right).$$

2. Montrer que si  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$  alors

$$\left( \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 f(x + y) = f(x) \times f(y) \right) \iff \left( \exists b \in \mathbb{R}_+^* \forall x \in \mathbb{R} f(x) = b^x \right).$$

3. Montrer que si  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$  alors

$$\left( \forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2} f(xy) = f(x) + f(y) \right) \iff \left( \exists a \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}_+^* f(x) = a \ln x \right).$$

4. Montrer que si  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*)$  alors

$$\left( \forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2} f(xy) = f(x) \times f(y) \right) \iff \left( \exists a \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}_+^* f(x) = x^a \right).$$

À chaque fois, les implications  $\Leftarrow$  sont évidentes.

1. Si  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$   $f(x + y) = f(x) + f(y)$ , alors on pose  $f(1) = a$  et on vérifie par une récurrence élémentaire que  $f(n) = na$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  puis, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

Ensuite, pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,

$$a = f(1) = f\left(\underbrace{\frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p}}_{p \text{ fois}}\right) = p \times f\left(\frac{1}{p}\right)$$

et donc  $f\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{a}{p}$ . De même, si  $p \in \mathbb{Z}$ .

Enfin, on obtient pour tout  $\frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$ ,  $f\left(\frac{q}{p}\right) = \frac{q}{p}a$ . Il reste à utiliser la continuité de  $f$  et la densité de  $\mathbb{Q}$  pour affirmer alors que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax$ .

2. En composant par  $\ln$  on se ramène à la question précédente. A-t-on vraiment besoin de la condition  $f$  à valeur strictement positive ?

3. Si  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$   $f(xy) = f(x) + f(y)$ , alors  $f(1) = f(1) + f(1)$ , donc  $f(1) = 0$ . Pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $f(x^n) = nf(x)$  et  $f(1) = f\left(x \times \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ , d'où  $f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$ . Et on peut en déduire que  $f\left(e^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{p}{q}f(e)$ , pour tout  $x$  réel.

Mais le plus rapide est de remarquer que  $f \circ \exp$  vérifie l'équation 2!

4. Encore une fois, si on est pressé, on remarque juste que  $\ln \circ f$  vérifie 3!

## 1.4 COMPACTITÉ

### 1.4.1 Définition

#### DÉFINITION 106

Une partie non vide  $K$  de  $E$  est compacte si toute suite d'éléments de  $K$  admet au moins une valeur d'adhérence dans  $K$ , c'est-à-dire si on peut extraire de toute suite d'éléments de  $K$  une suite qui converge dans  $K$  : pour toute suite  $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ , il existe une extractrice  $\rho : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $(u_{\rho(n)})$  converge vers  $l \in K$ .

#### PROPOSITION 107

Si  $K$  est une partie compacte, alors

1. Si  $(u_n) \in K^{\mathbb{N}}$  admet une unique valeur d'adhérence, alors  $(u_n)$  converge dans  $K$ .
2.  $K$  est un fermé de  $E$ .
3.  $K$  est une partie bornée.

**Preuve** — 1/ Supposons qu'il existe  $(u_{\rho(n)})$  une suite extraite qui converge vers  $l \in K$  et que  $(u_n)$  ne converge pas vers  $l$  : on pose  $\tau(0) = 0$  et il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $\tau(N) > \tau(N - 1)$ ,  $\|u_{\tau(N)} - l\| > \varepsilon$ . La suite extraite  $(u_{\tau(N)})$  admet une valeur d'adhérence qui ne peut être  $l$ , ce qui contredit l'hypothèse. Donc  $(u_n)$  converge vers  $l$ .

On en déduit 2/ immédiatement puisque toute suite convergente admet une unique valeur d'adhérence qui est dans  $K$  par hypothèse (caractérisation des fermés).

Si  $K$  n'est pas borné, alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $x_n \in K$ , tel que  $\|x_n\| \geq n$ . La suite  $(x_n)$  n'a pas de valeurs d'adhérence : toute suite extraite  $(x_{\rho(n)})$  vérifie  $\|x_{\rho(n)}\| \geq \rho(n) \geq n$  et donc n'est pas bornée, elle est divergente.  $\square$

#### PROPOSITION 108

Si  $K$  est une partie compacte de  $E$ , alors toute partie fermée  $F \subset K$  est encore une partie compacte, puisque toute suite de  $F$  admet une unique valeur d'adhérence dans  $K$ , mais  $F$  étant fermé elle est dans  $F$  et  $F$  est compacte.

## PROPOSITION 109

Dans un espace produit, un produit de compacts est un compact.

**Preuve** — Soit  $K = K_1 \times K_2$  et soit  $w_n = (u_n, v_n) \in K^{\mathbb{N}}$ . On peut extraire une suite  $w_{\rho(n)}$  telle que  $(u_{\rho(n)})$  converge vers  $u \in K_1$  et de cette suite on extrait une suite  $w_{\rho(\tau(n))}$  telle que  $(v_{\rho(\tau(n))})$  converge vers  $v \in K_2$ . Par définition de la norme produit, la suite  $(w_{\rho(\tau(n))})$  converge vers  $(u, v)$  car pour tout  $\varepsilon$ ,

$$\begin{aligned} \exists N_1, n \geq N_1 &\Rightarrow \|u_{\rho(\tau(n))} - u\|_1 \leq \varepsilon \\ \exists N_2, n \geq N_2 &\Rightarrow \|v_{\rho(\tau(n))} - v\|_2 \leq \varepsilon \end{aligned}$$

et pour  $N = \max(N_1, N_2)$ , on a

$$n \geq N \Rightarrow \|(u_{\rho(\tau(n))}, v_{\rho(\tau(n))}) - (u, v)\| \leq \max(\|u_{\rho(\tau(n))} - u\|_1, \|v_{\rho(\tau(n))} - v\|_2) \leq \varepsilon$$

Par récurrence, on montre que le résultat est encore vrai pour le produit  $p$  compacts.  $\square$

REMARQUE 110 — Un fermé borné est-il nécessairement compact ?

## PROPOSITION 111

Toute partie fermée bornée de  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  est un compact.

**Preuve** — Toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'une partie bornée  $X$  est bornée, et toute suite bornée de  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  admet une valeur d'adhérence (cf le théorème de Bolzano Weierstrass). Enfin, si la partie est fermée, alors toute valeur d'adhérence reste dans  $X$ . En conclusion  $X$  est bien compacte.  $\square$

## THÉORÈME 112

(Bolzano Weierstrass) Toute suite (réelle ou complexe) bornée admet au moins une valeur d'adhérence.

**Preuve** — Si  $u$  est réelle bornée, alors il existe  $m$  et  $M$  tels que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in [m; M]$ . On pose  $v_0 = m$ ,  $w_0 = M$  et  $\varphi(0) = 0$ . On construit par récurrence les suites  $v$ ,  $w$  et  $u_{\varphi(n)}$  : on suppose que pour  $n$  donné, on connaît  $v_n$ ,  $w_n$  et  $\varphi(n)$ . Au rang  $n+1$  :

1. Si une infinité de  $u_k$  appartiennent à  $[v_n; \frac{v_n+w_n}{2}]$ , alors on pose  $v_{n+1} = v_n$ ,  $w_{n+1} = \frac{v_n+w_n}{2}$  et  $\varphi(n+1) = k > \varphi(n)$  tel que  $u_{\varphi(n+1)} \in [v_{n+1}; w_{n+1}]$ .
2. Sinon une infinité de  $u_k$  appartiennent à  $[\frac{v_n+w_n}{2}; w_n]$ , alors on pose  $w_{n+1} = w_n$ ,  $v_{n+1} = \frac{v_n+w_n}{2}$  et  $\varphi(n+1) = k > \varphi(n)$  tel que  $u_{\varphi(n+1)} \in [v_{n+1}; w_{n+1}]$ .

Par construction, les suites  $v$  et  $w$  sont adjacentes, donc elles convergent vers une même limite et  $v_n \leq u_{\varphi(n)} \leq w_n$ , le théorème d'encadrement des limites permet de conclure.

Si  $u$  est complexe, on applique le même raisonnement à la partie réelle puis à la partie imaginaire.  $\square$

## 1.4.2 Caractérisation en dimension finie

## PROPOSITION 113

Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, alors une partie  $K$  de  $E$  est compacte ssi elle est fermée bornée.

**Preuve** — Soit  $E$  de base  $(e_1, \dots, e_n)$  et on considère la norme  $\|\cdot\|_{\infty}$  (on utilise qu'en dimension finie toutes les normes sont équivalentes!) et soit  $X$  une partie fermée bornée et  $(x_k)_{k \geq 0} \in X^{\mathbb{N}}$  : on suppose qu'il existe  $M > 0$  tel que  $\forall x \in X$ ,  $\|x\|_{\infty} \leq M$ . Les coordonnées  $(x_k^1, \dots, x_k^n)$  de  $x_k$  sont bornées indépendamment de  $k$  puisque  $\|x_k\|_{\infty} = \max(|x_k^1|, \dots, |x_k^n|) \leq M$ .

D'après la proposition précédente on peut extraire une suite  $(x_{\rho_1(k)})$  telle que  $(x_{\rho_1(k)}^1)$  converge, puis si  $\rho_1, \dots, \rho_l$  sont définies telles que les suites extraites  $(x_{\rho_1 \circ \dots \circ \rho_l(k)}^i)$  convergent pour tout  $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$ , alors on peut extraire une suite  $(x_{\rho_1 \circ \dots \circ \rho_{l+1}(k)})$  telle que  $(x_{\rho_1 \circ \dots \circ \rho_{l+1}(k)}^{l+1})$  converge. On a défini  $\rho_{l+1}$  telle que les suites extraites  $(x_{\rho_1 \circ \dots \circ \rho_{l+1}(k)}^i)$  convergent pour tout  $i \in \llbracket 1, l+1 \rrbracket$ . Quand  $n = l$ , on a extrait une suite convergente et sa limite est dans  $K$  car  $K$  est fermé.  $\square$

REMARQUE 114 — Ce résultat est faux en dimension infinie : par exemple si  $E = \mathbb{K}[X]$  muni de la norme :

$$P = \sum_{k=0}^d a_d X^d, \quad \|P\| = \left( \sum_{k=0}^d a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On commence par vérifier que l'on a bien défini une norme puis on considère la suite  $(P_n)$  définie par  $P_n = X^n$ . Elle est bornée (tous les éléments de la suite sont de norme 1), mais elle n'admet pas de valeur d'adhérence car pour tout  $n$  et  $p$ ,  $n \neq p$ ,  $\|P_n - P_p\| = \sqrt{2}$ . Nous avons montré que la boule unité n'est pas un compact. Le théorème de Riesz nous dit que la boule unité est compacte ssi  $E$  est de dimension finie.

### 1.4.3 Applications

PROPOSITION 115

Soit  $F \subset E$  une partie fermée d'un espace vectoriel normé et  $a \in E$  de dimension finie. Il existe un élément  $y \in F$  tel que  $d(a, F) = \|y - a\|$ .

**Preuve** — Soit  $y \in F$ . Alors  $F' = \overline{\mathcal{B}(a, \|y - a\|)} \cap F$  est une partie bornée et fermée donc compacte. On a  $d(a, F) = \inf\{\|z - a\|, z \in F'\} = d(a, F')$ .

Il existe une suite d'éléments  $(z_n)$  telle que  $(\|z_n - a\|)$  converge vers  $d(a, F)$  et comme  $F'$  est un compact, on peut en extraire une suite  $(z_{\rho(n)})$  convergente, de limite  $x \in F'$  puisque  $F'$  est compact. Par construction,  $x$  a la propriété attendue. Attention,  $y$  n'est pas unique.  $\square$

PROPOSITION 116

Une intersection non vide de compacts est compact et une union finie de compacts est compacte.

**Preuve** — Une suite d'éléments dans l'intersection  $\bigcap_{i \in J} K_i$  est dans tout compact  $K_i$  et donc on peut en extraire une valeur d'adhérence qui est dans  $K_i$  pour tout  $i$  donc dans l'intersection.

Pour l'union finie, un des  $K_i$  doit contenir une infinité de termes de la suite et donc admet une valeur d'adhérence dans ce compact.  $\square$

LEMME 117

(Très utile) Soit  $(K_n)$  une suite décroissante de compacts, alors  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$  est non vide.

**Preuve** — Preuve à retenir : soit  $x_n \in \bigcap_{k=1}^n K_k$ , alors  $(x_n) \in K_0^{\mathbb{N}}$  et donc admet une suite extraite  $(x_{\rho(n)})$  convergente de limite  $x \in K_0$ .

On montre que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in K_n$  : en effet  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $x_{n+k} \in K_{n+k} \subset K_n$  et comme  $\rho(n) \geq n$ , la suite  $(x_{\rho(n+k)})$  est une suite convergente dans  $K_n$  et donc sa limite est encore dans  $K_n$  puisque  $K_n$  est compacte.

On a donc montré que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$ .  $\square$

COROLLAIRE 118

(Théorème des segments emboîtés) Soit une suite décroissante de segments  $[a_i, b_i]$ , alors l'intersection est non vide

**Preuve** — Une preuve élémentaire est de montrer que la suite  $(a_n)$  est croissante majorée par  $b_0$  et  $(b_n)$  décroissante minorée par  $a_0$ . Soit  $a$  et  $b$  les limites des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ , alors  $a \leq b$  et  $[a, b] = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} [a_i, b_i]$ .  $\square$

### 1.4.4 Continuité sur un compact

PROPOSITION 119

(Image d'un compact) Soit  $f : K \rightarrow F$  continue,  $K \subset E$  un compact. Alors  $f(K)$  est un compact de  $F$ .

**Preuve** — Si  $(y_n)$  est une suite d'éléments de  $f(K)$ , alors  $y_n = f(x_n)$  avec  $x_n \in K$  pour tout  $n$ . On peut extraire une suite  $(x_{\rho(n)})$  qui converge vers  $x$ . Mais  $K$  est compact, donc  $x \in K$ , et  $f(x) = \lim f(x_{\rho(n)})$  par continuité de  $f(x)$  est dans  $f(K)$ . Donc  $f(K)$  est bien un compact.  $\square$

COROLLAIRE 120

(Théorème du maximum) Si  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , une application continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

**Preuve** — Puisque  $f(K)$  est un fermé borné de  $\mathbb{R}$ , sa borne inférieure  $m$  et supérieure  $M$  appartiennent à  $f(K)$  et donc il existe  $a$  et  $b \in K$  tels que  $m = f(a)$  et  $M = f(b)$ . On a montré que  $f$  admet un maximum et un minimum.  $\square$

REMARQUE 121 —

1. Une formulation courante de la proposition ci-dessus est : L'image d'un compact par une application continue est un compact.

2. Pour montrer qu'une application (même à plusieurs variables) est bornée, on cherchera donc à montrer qu'elle est continue sur un compact, le plus souvent une boule fermée.

### 1.4.5 Théorème de Heine

THÉORÈME 122

Toute application continue  $f : K \rightarrow F$  sur un compact  $K$  est uniformément continue.

**Preuve** — On procède par l'absurde : supposons que  $f$  n'est pas uniformément continue, alors

$$\exists \varepsilon, \forall \delta, \exists x, y \in K, \|x - y\| \leq \delta \text{ et } N(f(x) - f(y)) \geq \varepsilon.$$

On pose  $\delta = \frac{1}{n}$  et on construit ainsi deux suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  telles que pour tout  $n \geq 1$ ,  $\|x_n - y_n\| \leq \delta$  et  $N(f(x_n) - f(y_n)) \geq \varepsilon$ . On extrait une suite  $(x_{\rho(n)})$  qui converge vers  $x \in K$  (existe car  $K$  est compact) et par définition,  $(x_{\rho(n)} - y_{\rho(n)})$  tend vers 0 et donc  $(y_n)$  tend vers  $x \in K$ .

Enfin, la continuité de  $f$  assure que  $(f(x_{\rho(n)}) - f(y_{\rho(n)}))$  tend vers 0, ce qui contredit  $N(f(x_{\rho(n)}) - f(y_{\rho(n)})) \geq \varepsilon$  pour tout  $n \geq 1$ .  $\square$

REMARQUE 123 — Les applications lipschitziennes sont uniformément continues. Existe-t-il des fonctions uniformément continues non lipschitziennes ?

### 1.4.6 Équivalence des normes

Nous avons maintenant tous les outils pour terminer la preuve du théorème :

THÉORÈME 124

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

**Preuve** — On montre qu'une norme quelconque sur  $\mathbb{K}^n$  est équivalente à  $\|\cdot\|_\infty$ .

Reprenons la majoration facile : si  $N$  une norme sur  $\mathbb{K}^n$  de base canonique  $(e_1, \dots, e_n)$ , on a

$$N(x) = N\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \leq \sum_{i=1}^n |x_i| N(e_i) \leq \|x\|_\infty \sum_{i=1}^n N(e_i).$$

On pose  $\beta = \sum_{i=1}^n N(e_i)$  et on a  $N(x) \leq \beta \|x\|_\infty$ .

Ceci montre en particulier que l'application  $Id : (E, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (E, N)$  est  $\beta$ -lipschitzienne :

$$N(x - y) \leq \beta \|x - y\|_\infty.$$

En particulier, elle est continue. De plus, la boule unité fermée de centre 0 pour la norme infinie s'écrit

$$\overline{B}(0, 1) = \{x \in \mathbb{K}^n, \|x\|_\infty \leq 1\} = \prod_{i=1}^n [-1, 1]$$

qui est compact comme produit de compacts.

On en déduit que l'application  $N$  admet un minimum sur la sphère unité de  $\|\cdot\|_\infty$  qui est aussi compacte comme fermé d'un compact. Soit  $\alpha$  ce minimum, on a  $\alpha \neq 0$  car il s'écrit  $\alpha = N(x)$  avec  $\|x\|_\infty = 1 \neq 0$ .

On en déduit que

$$\forall x \in E, N(x) \geq \alpha \|x\|_\infty.$$

Ce qui termine le cas si  $E = \mathbb{K}^n$ , mais on a vu que si  $E$  est de dimension finie rapporté à une base,  $E$  est homéomorphe à  $\mathbb{K}^n$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ , le résultat en découle.  $\square$

## 1.5 APPLICATION BILINÉAIRES

PROPOSITION 125

Soit  $B : E \times F \rightarrow \mathbb{K}$  bilinéaire où  $E$  et  $F$  sont des espaces vectoriels normés de dimension finie. Alors  $B$  est continue.

**Preuve** — Soit  $E$  de base  $(e_1, \dots, e_n)$  et  $(f_1, \dots, f_p)$  une base de  $F$  :

$$\begin{aligned} \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in E, \forall y = (y_1, \dots, y_p) \in F, B(x, y) &= B_k(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, y_1 f_1 + \dots + y_p f_p) \\ &= \sum_{(i,j) \in [1,n] \times [1,p]} x_i y_j B_k(e_i, f_j) = {}^t X A Y \end{aligned}$$

où  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}$  avec  $a_{i,j} = B_k(e_i, f_j)$  et  $X$  et  $Y$  sont les matrices coordonnées de  $x$  et  $y$  dans leur base respective. On en déduit que l'application  $B$  est continue.

De plus, en prenant la norme sup sur  $E$  et  $F$  relativement aux bases  $(e_1, \dots, e_n)$  et  $(f_1, \dots, f_p)$ , alors

$$|B(x, y)| \leq \|x\|_\infty \|y\|_\infty \times \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket} |B(e_i, f_j)| \Rightarrow |B(x, y)| \leq M \cdot \|x\|_\infty \|y\|_\infty$$

avec  $M \geq \sup_{k \in \llbracket 1, r \rrbracket} \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket} |B(e_i, f_j)|$ .

Il existe donc  $M \in \mathbb{R}$ , tel que

$$\|B(x, y)\| \leq M \|x\| \|y\|.$$

Ceci peut vous faire penser aux applications lipschitziennes.

Réciproquement, cette inégalité montre la continuité de  $B$  en  $(x_0, y_0) \in E \times F$  :

$$\begin{aligned} |B(x, y) - B(x_0, y_0)| &\leq |B(x, y) - B(x_0, y)| + |B(x_0, y) - B(x_0, y_0)| \\ &\leq M (\|x_0 - x\| \|y\| + \|x_0\| \|y_0 - y\|) \\ &\leq M (\|y\| + \|x_0\|) \|(x - x_0, y - y_0)\|_\infty \end{aligned}$$

□

REMARQUE 126 — *Le produit scalaire, le produit vectoriel, le déterminant sont continues.*

## 1.6 NORMES SUR LES APPLICATIONS LINÉAIRES EN DIMENSION FINIE

Nous supposons ici que les espaces vectoriels  $E$  et  $F$  sont de dimension finie. Nous noterons  $\| \cdot \|$  la norme sur  $E$  et sur  $F$ , sans distinction. Ceci ne posera pas de problème pour ce paragraphe, attendu que toutes les normes sont équivalentes sur un espace vectoriel de dimension finie. Rappelons que

PROPOSITION 127

*Toute application linéaire  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$  est continue.*

REMARQUE 128 — *Nous avons montré qu'en dimension quelconque, une application linéaire est continue ssi elle est  $k$ -lipschitzienne pour un certain  $k$ . Nous allons voir que le plus petit  $k$  possible pour  $\varphi$  fixé joue un rôle important.*

PROPOSITION 129

*(Norme subordonnée d'une application linéaire) Soit  $E$  et  $F$  des espaces vectoriels normés et  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . L'application*

$$\mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \|f\| = \sup_{0 < \|x\| \leq 1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$$

*définie une norme sur  $\mathcal{L}(E, F)$  appelée norme subordonnée (sous-entendu aux normes sur  $E$  et  $F$ ).*

**Preuve** — Notons qu'une application linéaire est uniquement déterminée par l'image de la sphère de centre 0 de rayon 1 :

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad \frac{x}{\|x\|} \in \mathcal{S}(0, 1) \text{ et } f(x) = \|x\| \times f\left(\frac{x}{\|x\|}\right).$$

On en déduit la série d'égalités, les bornes supérieures étant prises a priori dans  $\overline{\mathbb{R}}$

$$\sup_{0 < \|x\| \leq 1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}.$$

Or toute application linéaire en dimension finie est continue donc  $f$  est bornée sur la boule unité fermée, ce qui montre que la borne supérieure est finie et est atteinte.

De plus si  $\|f\| = 0$ , alors pour tout  $x$ ,  $\|x\| = 1$ ,  $f(x) = 0$  et donc

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad f(x) = \|x\| \times f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = 0,$$

et  $f$  est l'application nulle.

L'homogénéité et l'inégalité triangulaire viennent du fait que

$$\forall x \in E, \quad \|\lambda f(x)\| \leq |\lambda| \cdot \|f(x)\| \text{ et } \|f(x) + g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\|.$$

□

COROLLAIRE 130

(Norme subordonnée d'une matrice) L'application

$$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad A \mapsto \|A\| = \sup_{\|X\| \leq 1} \|AX\| = \sup_{\|X\|=1} \|AX\| = \sup_{\|X\| \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$$

définie une norme sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  appelée norme subordonnée où pour tout  $l \in \mathbb{N}$ ,  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $\mathcal{M}_{l,1}(\mathbb{K}) \sim \mathbb{K}^l$

**Preuve** — On associe canoniquement à  $A$  l'application  $f : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$ , les espaces  $\mathbb{K}^n$  étant muni d'une norme  $\|\cdot\|$  et on applique la proposition précédente.  $\square$

PROPOSITION 131

Pour tout  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $x \in E$ ,  $\|f(x)\| \leq \|f\| \times \|x\|$ .

**Preuve** —

$$\forall x \in E, x \neq 0, \|f(x)\| = \|x\| \times f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \leq \|x\| \times \|f\|$$

$\square$

COROLLAIRE 132

Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ ,  $E, F$  et  $G$  des espaces vectoriels normés de dimension finie, alors

$$\|g \circ f\| \leq \|g\| \times \|f\|$$

**Preuve** — On a pour  $\|x\| \leq 1$ ,

$$\|g \circ f(x)\| \leq \|f(x)\| \cdot \|g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|.$$

$\square$

COROLLAIRE 133

$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$  et  $\|A^n\| \leq \|A\|^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

REMARQUE 134 — La norme subordonnée est multiplicative, ceci nous sera très utile.

EXEMPLE 135 — On peut définir la fonction exponentielle

$$\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad A \mapsto \exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

En effet, la série converge en norme

$$\sum_{n=0}^N \frac{\|A^n\|}{n!} \leq \sum_{n=0}^N \frac{\|A\|^n}{n!}$$

qui tend vers  $\exp(\|A\|)$ , donc la série converge puisque l'on est en dimension finie.