Exercice 2 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que :

$$f(x) = \int_0^x t f(t)\, dt + 1 . \quad (*)$$

On sait que $x \longmapsto \int_0^x t f(t)\, dt + 1$ est dérivable de dérivée $x f(x)$. Donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Dérivons l'égalité : $f'(x) = x f(x)$

$$\Longleftrightarrow f'(x) - x f(x) = 0$$

$e^{-\frac{x^2}{2}} \neq 0$

$$\Longleftrightarrow \left(f'(x) - x f(x)\right) e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \left(f(x) e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = 0$$

$$\Longleftrightarrow f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} = C \quad C \in \mathbb{R}$$

$\Longleftrightarrow f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \times C$.

Remarque : $(*) \Longrightarrow f(0) = \int_0^0 t f(t)\,dt + 1 = 1$

Donc $C = 1$ et $f(x) = e^{x^2/2}$. Ceci est nécessaire, donc la solution, si elle existe vaut

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Montrons que cette fonction vérifie $(*)$:

$$\int_0^x t e^{\frac{t^2}{2}}\,dt + 1 = \left[e^{t^2/2} \right]_0^x + 1 = e^{\frac{x^2}{2}} - 1 + 1 = e^{x^2/2}$$

Donc la solution existe et unique.

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que la fonction $g = f + f'$ vérifie $\lim\limits_{+\infty} g = 0$.

Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$

Ruse : résolvons $f + f' = g \Longleftrightarrow (f+f')e^{x} = g e^{x}$

$$\Longleftrightarrow (f e^{x})' = g(x) e^{x}$$

$$\Longleftrightarrow f e^{x} = \int_0^x g(t) e^{t}\, dt + C$$

$$\Longleftrightarrow f(x) = e^{-x} \int_0^x g(t) e^{t}\, dt + C e^{-x}$$

première remarque : $\lim\limits_{+\infty} e^{-x} = 0$. Donc, il reste à prouver que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} \int_0^x g(t) e^{t}\, dt = 0$

avec l'hypothèse $\lim\limits_{+\infty} g = 0$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0 \quad \text{tq} \quad x > A \Rightarrow |g(x)| < \varepsilon/2$

Donc si x $x > A$ A est fixé :

$$\left| e^{-x} \int_0^x g(t) e^t \, dt \right| \leq \left| e^{-x} \int_0^A g(t) e^t \, dt \right| + \left| e^{-x} \int_A^x g(t) e^t \, dt \right|$$

Soit $M = \left| \int_0^A g(t) e^t \, dt \right|$

$$\leq M e^{-x} + \underbrace{\varepsilon/2 \, e^{-x} \underbrace{\int_A^x e^t \, dt}_{= e^x - e^A \leq e^x}}_{\leq \varepsilon}$$

$\exists B > A$ tq $x > B$ $\left| M e^{-x} \right| < \varepsilon/2$

$$\left| e^{-x} \int_0^x g(t) e^t \, dt \right| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \cancel{2} \frac{\varepsilon}{\cancel{2}} = \varepsilon$$

Par définition de la limite, on a montré que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ $\square$.