Ex 2 : 1) $t^2 y' - y = 0$ $(*)$

Soit $I \subset \mathbb{R}^*$ un intervalle $\neq \emptyset$ et on résout sur I :

$$(*) \iff y' - \frac{1}{t^2} y = 0 \iff \left(y' - \frac{1}{t^2} y\right) e^{\frac{1}{t}} = 0$$

$$\iff \left(y e^{\frac{1}{t}}\right)' = 0 \iff \underline{y = c_1 e^{-\frac{1}{t}}} \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Soit y une solution en $\mathbb{R}$, alors il c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$

$x > 0$: $y(x) = c_1 e^{-\frac{1}{t}}$

$x < 0$: $y(x) = c_2 e^{-\frac{1}{t}}$

Étude en 0 :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \varphi = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} c_1 e^{-\frac{1}{x}} = 0 \Rightarrow \varphi(0) = 0.$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \varphi = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} c_2 e^{-\frac{1}{x}} = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } c_2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } c_2 = 0 \end{cases}$$

La fonction est dérivable en 0 :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 0}{x} = \lim_{X \to +\infty} X e^{-X} = 0 \qquad X = \frac{1}{x}$$

et

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = 0.$$

Conclusion : si φ existe alors φ est de la forme

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} C_1 e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Si $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} C_1 e^{-1/x} & x > 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\underline{\varphi|_{\mathbb{R}_+^*}}$ est solution de $*$ $\underline{\varphi|_{\mathbb{R}_-^*}}$ est solution.

On a montré que φ est continue et dérivable et $0^2\varphi'(0) - \varphi(0) = 0$ et φ

est une solution sur $\mathbb{R}$.

$$\mathcal{Y} = \left\{ y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \begin{cases} C_1 e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},\ C_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

---

2) $t y' - y = t \quad (*)$ On résout l'équation sur $I \subset \mathbb{R}^*$, I intervalle non vide

$$(*) \Leftrightarrow y' - \frac{1}{t} y = 1 \Leftrightarrow \left(y' - \frac{1}{t} y\right) e^{-\ln|t|} = e^{-\ln|t|}$$

$$\Leftrightarrow \left(y e^{-\ln|t|}\right)' = \frac{1}{|t|} \Leftrightarrow y = \left(\ln|t| + c\right)|t|$$

Si φ est solution $\mathbb{R}$, alors $\exists\, c_1$ et $c_2 \in \mathbb{R}$ telles que

$$\varphi|_{\mathbb{R}_+^*}(t) = t\ln t + c_1 t \qquad \varphi|_{\mathbb{R}_-^*} = -t\ln(-t) - c_2 t$$

φ est dérivable $\forall t > 0$,

$$\varphi'|_{\mathbb{R}_+^*}(t) = \ln t + 1 + c_1$$

on a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \varphi'(t) = -\infty$ φ n'est pas dérivable en 0.

Conclusion : il n'existe pas de solution sur $\mathbb{R}$.

3) $ty' - 2y = t^4 \quad (*)$

On résout l'équation sur $I \subset \mathbb{R}_+^*$, I intervalle.

$$(*) \iff y' - \frac{2}{t} y = t^3 \iff \left(y e^{-2\ln t}\right)' = t^3 e^{-2\ln t}$$

$$\iff \left(y \times \frac{1}{t^2}\right)' = t \iff y = \frac{t^4}{2} + c t^2 \quad c \in \mathbb{R}$$

Si y est une solution sur $\mathbb{R}$, alors il existe des constantes c_1 et c_2 telles que

$$y|_{\mathbb{R}_+^*}(t) = \frac{t^4}{2} + c_1 t^2 \qquad y|_{\mathbb{R}_-^*}(t) = \frac{t^4}{2} + c_2 t^2$$

$\Rightarrow y(0) = 0$ par continuité.

On montre que $\forall C_1, C_2$ φ est bien continue, dérivable en 0 et est solution de l'équation différentielle.

4/ $t(1+t^2)y' - (t^2-1)y = -2t$

On résout $(*)$ sur $I \subset \mathbb{R}^*$ intervalle :

$$(*) \iff y' - \frac{t^2-1}{t(1+t^2)}y = \frac{-2}{1+t^2}$$

On écrit $\dfrac{t^2-1}{t(1+t^2)} = -\dfrac{1}{t} + \dfrac{2t}{1+t^2} \Rightarrow \displaystyle\int \frac{t^2-1}{t(1+t^2)}$

$$= -\ln|t| + \ln 1+t^2 = \ln \frac{1+t^2}{|t|}.$$

$$(*) \iff \left(y\, e^{-\ln \frac{1+t^2}{|t|}}\right)' = \frac{-2}{1+t^2}\, e^{-\ln \frac{1+t^2}{|t|}}$$

$$\iff \left(y\, \frac{|t|}{1+t^2}\right)' = \frac{-2|t|}{(1+t^2)^2} = \frac{t}{|t|}\, \frac{-2t}{1+t^2}$$

$$\iff y\, \frac{|t|}{1+t^2} = \frac{t}{|t|}\, \frac{1}{1+t^2} + c$$

$$\iff y = \frac{1}{t} + c\, \frac{1+t^2}{|t|}$$

Si y est solution sur $\mathbb{R}$, il existe des constantes C_1 et C_2 telles que

$$\varphi_{|\mathbb{R}_+^*}(t) = \frac{1}{t} + c_1 \frac{1+t^2}{t} = \frac{(c_1+1)}{t} + c_1 t$$

$$\varphi_{|\mathbb{R}_-^*}(t) = \frac{1}{t} + c_2 \frac{1+t^2}{-t} = \frac{(1-c_2)}{t} - c_2 t$$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \varphi$ existe ssi $c_1 = -1$ et $\varphi_{|\mathbb{R}_+^*}(t) = -t$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \varphi$ existe ssi $c_2 = 1$ et $\varphi_{|\mathbb{R}_-^*}(t) = -t$

Par continuité, $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(t) = -t$

φ est dérivable et φ vérifie l'équation en 0

La solution de (*) sur $\mathbb{R}$ est unique :
$$\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto -t \end{array} . \quad \boxed{\text{ }}$$

Exo 4 : $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue et

$$\int_0^x (x-3t) f(t)\, dt = \frac{x^2}{2}.$$

$$\Leftrightarrow x \int_0^x f(t)\, dt - 3 \int_0^x t f(t)\, dt = \frac{x^2}{2}$$

On peut dériver car f est C^0 : $\forall x \in \mathbb{R}_+$

$$\int_0^x f(t)\, dt + x f(x) - 3x f(x) = x$$

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt \qquad -2x y' + y = x \quad (*)$$

F solution de cette équation différentielle.

sur $]0,+\infty[$:

$$(*) \iff y' - \frac{1}{2x} y = -\frac{1}{2}$$

$$\iff \left(y e^{-\frac{1}{2}\ln x} \right)' = -\frac{e^{-\frac{1}{2}\ln x}}{2} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\iff y \times \frac{1}{\sqrt{x}} = -\sqrt{x} + C$$

$$y = -x + C\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow f(x) = -1 + \frac{C}{2\sqrt{x}}$$

Si f existe alors $\forall x \in]0, +\infty[$

$f(x) = -1 + \frac{c}{2\sqrt{x}}$ mais f n'admet pas de limite en 0^+ si $c \neq 0$

Donc $f = -1$ est la seule solution possible. Vous vérifiez que f est bien une solution.