

$$S_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (1 \ 2)$$

$$S_5 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad (1 \ 5)$$

$$(1 \ 2)$$

$$\tau: \begin{array}{l} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \end{array}$$

$$x \mapsto x \quad \text{si } x \neq 1, 2.$$

$$\tau^{-1}: \begin{array}{l} 2 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 2 \end{array}$$

$$x \mapsto x \quad \text{si } x \neq 1, 2$$

$$x \mapsto x \quad \text{si } x \neq 1, 2$$

$$\tau^{-1} = (2 \ 1) = (1 \ 2)$$

$$\tau^{-1} = \tau \quad \text{idempotente}$$

preuve: récurrence sur n .

$$\text{Si } n=2 : S_2 = \{ \text{id}, (1,2) \}$$

$(1,2)$ est une transposition: elle est la composée de 1 transposition.

$$\text{id} = (1,2) \circ (1,2)$$

Donc la propriété est vraie au rang 2.

Hérédité: On suppose la

propriété vraie au rang n .

$[1, n+1]$ Soit $\sigma \in S_{n+1}$

si $\sigma(n+1) = n+1$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & n+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ a_1 & a_n \end{pmatrix}$$

On peut considérer que $\sigma \in S_n$

Par hypothèse de récurrence :

$$\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_r \quad \begin{array}{l} \tau_i \in S_n \\ \tau_i \text{ transposition} \end{array}$$

On peut considérer que $\tau_i \in S_{n+1}$

et donc σ se décompose en un

produit de transpositions.

$$\underline{\text{Si } \sigma(n+1) = p \leq n}$$

$$\text{On pose } \tau = (p \ n+1)$$

$$\tau \circ \sigma(n+1) = \tau(p) = n+1$$

et $\tau \circ \sigma \in S_{n+1}$:

D'après le cas $\sigma(n+1) = n+1$, on en déduit

qu'il existe des transpositions τ_1, \dots, τ_r

telles que $\tau \circ \sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_r$.

On compose à gauche par τ :

$$\underline{\sigma = \text{id} \circ \sigma = \tau \circ \tau_1 \circ \dots \circ \tau_r}$$

La récurrence est terminée.

$$(15) \circ (35) \circ (12) \circ (46) \circ (12)$$

$$= (15) \circ (35) \circ (12) \circ (12) \circ (46)$$

$$= (15) \circ (35) \circ \text{id} \circ (46)$$

$$= (15) \circ (35) \circ (46) = \underline{\delta_3}$$

$$= (16) \circ (16) \circ (15) \circ (35) \circ (46)$$

$$= (23) \circ (23) \circ (16) \circ (16) \circ (15) \circ (35) \circ (46)$$

$$\delta_3 = (46) \circ (13) \circ (15)$$

$$\delta_3^{-1} = (15) \circ (13) \circ (46)$$

$$(46) \circ (13) \circ (15) \circ (15) \circ (13) \circ (46)$$

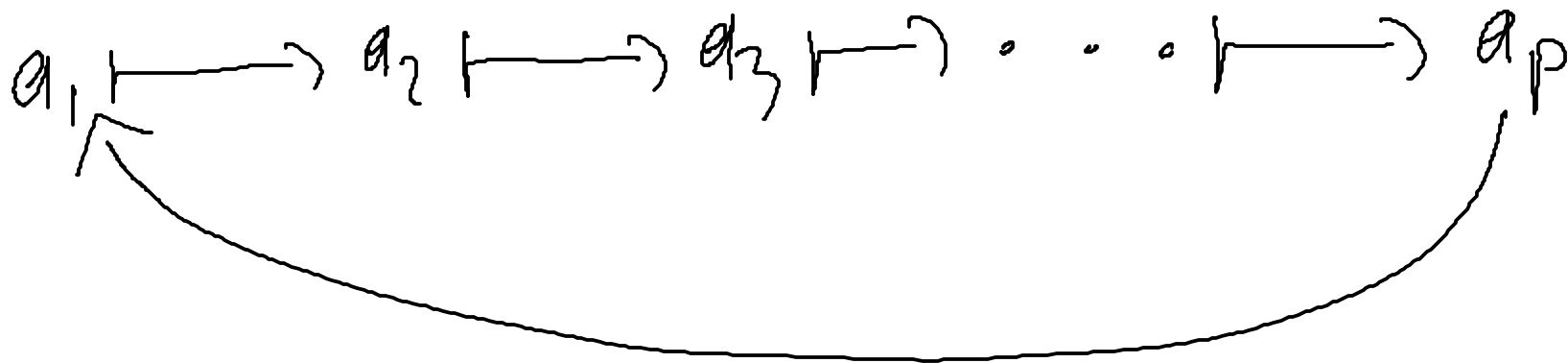
id

id

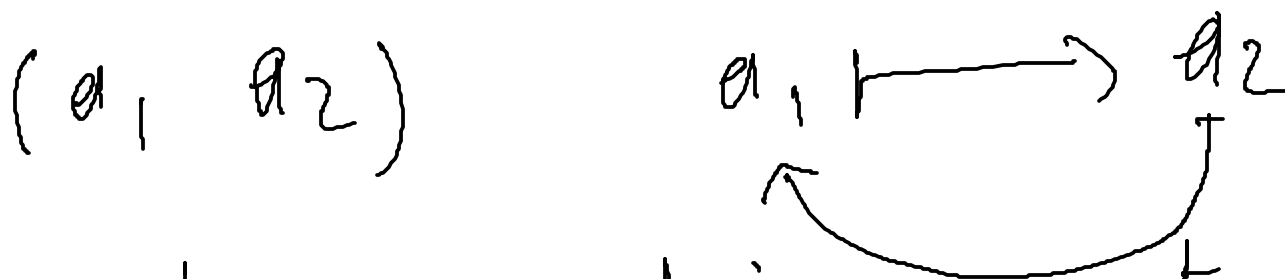
id

= id

$$\sigma_3^{-1} = (15) \circ (13) \circ (46)$$

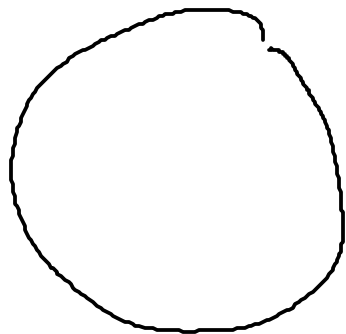


$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & & a_{p-1} & a_p \\ a_2 & a_3 & & a_p & a_1 \end{pmatrix} \text{ p-cycle.}$$



une transposition est un 2-cycle.

un cycle



$$\sigma^k \circ \sigma^{k'} = \underbrace{\sigma^0 \circ \sigma^0 \circ \sigma^0}_{h} \circ \underbrace{\sigma^0 \circ \sigma^0 \circ \sigma^0}_{h'} \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\sigma^k \circ \sigma^{-k} = \underbrace{\sigma^0}_{h} \circ \underbrace{\sigma^0 \circ \sigma^{-1} \circ \sigma^0}_{h} \circ \sigma^{-1} = \text{id}.$$

$$= \sigma^{k-k} = \sigma^0$$

$$\forall k, k' \in \mathbb{Z} \quad \sigma^k \circ \sigma^{k'} = \sigma^{(k+k')}.$$

$(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p)$

$\forall h \in \llbracket \underline{2}, p \rrbracket$

$$a_h = \sigma^{h-1}(a_1)$$

$h=1$ vrai

$$a_1 = \text{id}(a_1)$$

Initialisation

$h=2$

$$a_2 = \sigma(a_1)$$

Si $a_h = \sigma^{h-1}(a_1) \quad h \leq p-1$

Hérédité

$$\begin{aligned} a_{h+1} &= \sigma(a_h) = \sigma(\sigma^{h-1}(a_1)) \\ &= \sigma^h(a_1) \end{aligned}$$

Donc par récurrence, la proposition est vraie.

$$x \text{ tq } \delta(x) \neq x.$$

$$\left\{ x, \delta(x), \delta^2(x), \delta^3(x), \dots, \delta^h(x), \dots, h \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\delta: [1, n] \longrightarrow [1, n].$$

cet ensemble a au plus n éléments.

car inclus dans $[1, n]$:

$$\Rightarrow \exists i, j \in \mathbb{N} \text{ tq } \delta^i(x) = \delta^j(x).$$

$$\delta^{-i}(\delta^i(x)) = \underline{x} = \delta^{-i}(\delta^j(x)) = \underline{\delta^{j-i}(x)}$$

$j-i > 0$.

Donc il existe p tel que $\delta^p(x) = x$.

$\begin{matrix} \text{999} \\ \dots \\ \text{...} \end{matrix} \triangle \Rightarrow$
 $(x, \delta(x), \delta^2(x), \dots, \delta^{p-1}(x))$

est p -cycle.

Danger: on ne sait pas si $x, \delta(x), \dots, \delta^{p-1}(x)$ sont deux à deux distincts.

Exemple $\delta = (12)$ $\delta^4(x) = x \quad \forall x \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$.

2 cycles.

$$\delta = (1 \ 2 \ 1 \ 2)$$

$$= (1, \delta(1), \delta^2(1), \delta^3(1)) \quad \delta^4(1) = 1.$$

On sait que :

$$\left\{ \begin{array}{l} p \in \mathbb{N}^* \\ \text{tq } \sigma^p(x) = x \end{array} \right\} \neq \emptyset$$

$\subset \mathbb{N}^*$

On va prendre le plus petit p
dans l'ensemble :

$\{x, \sigma^1(x), \dots, \sigma^{p-1}(x)\}$ possède
 p éléments : supposons $\sigma^i(x) = \sigma^j(x)$

avec $i, j \leq p-1$ et $i < j \Rightarrow \sigma^{j-i}(x) = x$

$j \leq p-1$ et $i > 0$ $j-i \leq p-1$ **IMPOSSIBLE**
CONTRADICTION

Donc $x, \sigma(x), \dots, \sigma^{p-1}(x)$ sont deux à deux distincts.

et alors $\sigma = (x, \dots, \sigma^{p-1}(x))$ est un p -cycles.

$A_\sigma = \{a_1, a_2\}$ · $\forall x \neq a_1, a_2 \quad \sigma(x) = x$

$$\sigma(a_1) = a_2$$

$$\sigma(a_2) = a_1$$

Initialisation :

$\sigma = (a_1 a_2)$ 2 cycles.

Récurrente forte: Hérité

$\forall i \leq k \quad \uparrow(i)$ est vraie.

On montre que $\uparrow(k+1)$ est vraie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (13) \circ (245)$$

$$\left(1 \ \delta(1) \dots \delta^{p-1}(1) \right) \left(2 \ \delta(2) \dots \right)$$