$\mathbb{U} = \{ z \in \mathbb{C},\ |z| = 1 \}$

<u>uni</u>m<u>odulaire</u>

$(\mathbb{U}, \times)$ $\quad \mathbb{U} \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U}$

$\quad (z, z') \longmapsto z \times z'$ commutative

i) associativité : $\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}$

$(z \times z') \times z'' = z \times (z' \times z'')$

vrai sur les complexes.

ii) élément neutre : 1 ; $1 \times z = z$.

iii) $z \in \mathbb{U}$, $|z| = 1 \Rightarrow z \neq 0 \quad z^{-1} \in \mathbb{C}$

$z^{-1} \in \mathbb{U}$? $\quad z^{-1} = \bar{z} \quad z\bar{z} = |z|^2 = 1$.

$|\bar{z}| = |z|$ donc $z^{-1} \in \mathbb{U}$.

c) vérifier que $zz' \in \mathbb{U}$. et $z, z' \in \mathbb{U}$

$$|zz'| = |z||z'|$$
$$= 1.$$

$G = \{e\}$ $\quad e * e = e$. $(G, *)$ est un groupe.

un groupe a au moins un élément.

$G = \{0, 1\}$.

$$G \times G \longrightarrow G$$
$$(x, y) \longmapsto x + y$$

4 éléments dans $G \times G$.

$1 + 1 = ?$ $\quad 1 + 1 = 1$ $\quad$ 1 inversible

$(\mathcal{P}(E), \cup)$

$$\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$$
$$(A, B) \longmapsto A \cup B$$

commutative

Cours de Algèbre : la loi $\cup$ est associative.

On cherche $\Omega \in \mathcal{P}(E)$ telle que

$\forall A \in \mathcal{P}(E) \quad A \cup \Omega = A \Rightarrow \phi \cup \Omega = \phi$

Donc $\underline{\Omega = \phi}$ $\quad$ ϕ est l'élément neutre

Car ; $A \cup \phi = A$.

Mais : Si A est inversible, alors il existe B telle que $A \cup B = \phi \Rightarrow A = B = \phi$

Le seul élément inversible de $(\mathcal{P}(E), \cup)$ est ϕ.

De la même manière $(\mathcal{P}(E), \cap)$ n'est pas un groupe. $\cap$ est commutative, associative. L'élément neutre est ; Ω telle que $A \cap \Omega = A$ si $A = E$

$$E \cap \Omega = E$$

$$\Rightarrow \Omega = E$$

Mais $A \cap B = E \iff A = B = E$.

Le seul élément inversible est E.

$$A \Delta B = (A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B)$$

$$= A \cap \bar{B} \cup B \cap \bar{A}$$

$(\mathcal{P}(E), \Delta)$ c'est un groupe.

i) commutatif : $A \Delta B = A \cap \bar{B} \cup B \cap \bar{A}$

$$= B \cap \bar{A} \cup A \cap \bar{B}$$

$$= B \Delta A.$$

ii) associativité : (exemple 2)

$$\chi_A : E \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\mathbb{1}_A$ fonction caractéristique d'un ensemble $\mathbb{1}_A : E \longrightarrow \{0,1\}$;

$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\mathbb{1}_A \neq \chi_A$

$$\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B : E \longrightarrow \{0,1,2\}$$

$$\chi_A + \chi_B : E \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0,1\}$$

$$x \longmapsto \chi_A(x) + \chi_B(x)$$

et $\chi_A(x) + \chi_B(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin B \text{ et } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \text{ et } x \notin B \\ 1 & \text{si } x \in B \text{ et } x \notin A \\ 0 & \text{si } x \in A \cap B \end{cases}$

$$\chi_A + \chi_B = \chi_{A \Delta B}$$ permet de retrouver $A \Delta B$.

et on a : $\chi_A + \chi_B + \chi_C = \chi_{A\Delta B} + \chi_C$

$$= \chi_{(A\Delta B)\Delta C}$$

$$= \chi_A + \chi_{B \Delta C}$$

$$= \chi_{A \Delta (B \Delta C)}$$

Donc : $\chi_{(A\Delta B)\Delta C} = \chi_{A\Delta(B\Delta C)}$

Δ est associative.

iii) l'élément neutre ? : Ω telle que

$\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A \Delta \Omega = A$

Si $A = E$ $\quad$ $E \Delta \Omega = \overline{\Omega} = E$

$\Rightarrow \Omega = \emptyset$ et alors :

$A \Delta \emptyset = A \cap \overline{\emptyset} \cup \emptyset \cap \overline{A}$

$= A$

d'où $\emptyset$ est l'élément neutre

(iv) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, on cherche B telle que

$$A \Delta B = \emptyset$$

$$A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$$

$B = A$ $\qquad A \Delta A = \emptyset$.

A est l'inverse de A : A est involutif.

$$G = G_1 \times G_2$$

$$\varphi : (G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) \longmapsto G_1 \times G$$

$$(g_1, g_2) \times (h_1, h_2) \longmapsto (g_1 *_1 h_1, g_2 *_2 h_2)$$

$e = (e_1, e_2) \quad \forall (g_1, g_2)$:

$$(e_1, e_2) * (g_1, g_2) = (e_1 * g_1, e_2 * g_2)$$
$$= (g_1, g_2)$$

de même $(g_1, g_2) * (e_1, e_2) = (g_1, g_2)$;

De plus, si g_1^{-1} est l'inverse de g_1

g_2^{-1} ——— g_2

$$(g_1, g_2) * (g_1^{-1}, g_2^{-1}) = (g_1 *_1 g_1^{-1}, g_2 *_2 g_2^{-1})$$
$$= (e_1, e_2) = e$$

$= (g_1^{-1}, g_2^{-1}) * (g_1, g_2)'$

$$(y^{-1})^{-1} = y^{(-1)\times(-1)} = y^1$$

$n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$:

i) $0 \in n\mathbb{Z}$ car $0 = n0$.

ii) $\forall x, y \in n\mathbb{Z} \Rightarrow \exists p$ et $p' \in \mathbb{Z}$ tels que $x = np$ et $y = np'$

$x + y = np + np' = n(p+p') \in n\mathbb{Z}$

donc $+$ est stable dans $n\mathbb{Z}$.

iii) Si $x = np \in n\mathbb{Z}$, alors $-x = n(-p) \in n\mathbb{Z}$

Donc $(n\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{U}_n = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1 \}$

$|z^n| = |z|^n = 1 \Rightarrow |z| = 1$ donc

$\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$

i) $1^n = 1 \Rightarrow 1 \in \mathbb{U}$. $\neq \emptyset$

ii) $\forall z, z' \in \mathbb{U}_n$, a-t-on $z z'^{-1} \in \mathbb{U}_n$? car $(z z'^{-1})^n = \underbrace{z^n}_{=1} \underbrace{(z'^n)}_{=1}^{-1} = 1$.

donc $(\mathbb{U}_n, \times)$ sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$.

$A_n < S_n$ sous-groupe ; $n \geq 2$

i) $Id \in A_n$ $\quad id = (12)\circ(12)$

$\varepsilon(id) = (-1)^2$

ii) Si $\sigma, \sigma' \in A_n$ $\quad \varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \varepsilon(\sigma) \times \varepsilon(\sigma')$

$= \underline{1} \times \underline{1} = \underline{1}$.

$\sigma \circ \sigma' \in A_n$

iii) $\forall \sigma \in A_n$ $\quad \underset{\underset{\varepsilon(id)\,=\,\underline{1}}{\parallel}}{\varepsilon(\sigma \circ \sigma^{-1})} = \overset{\overset{\underline{1}}{\parallel}}{\varepsilon(\sigma)} \times \varepsilon(\sigma^{-1})$

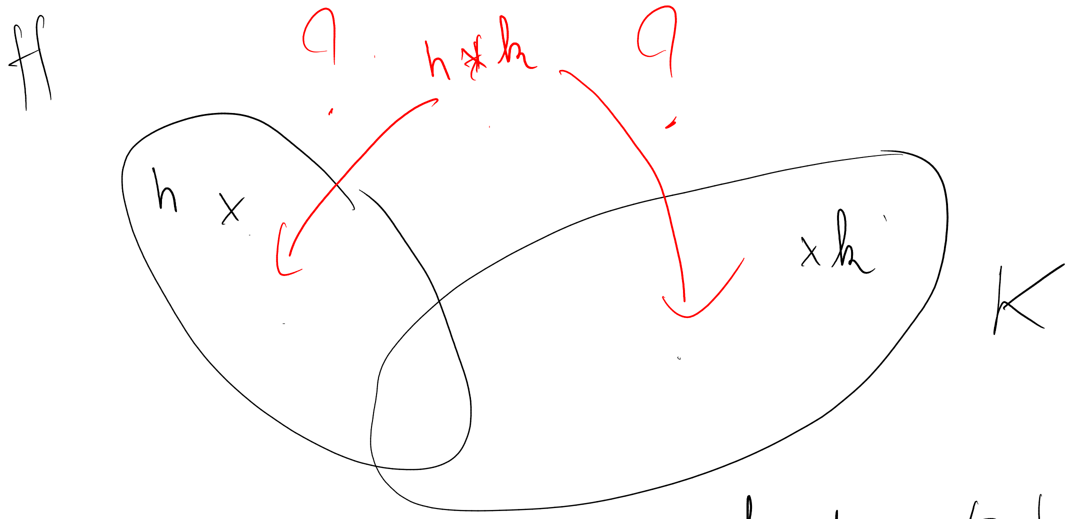
donc $\varepsilon(\sigma^{-1}) = 1$ et $\sigma^{-1} \in A$.

Autre méthode :

Si $\gamma = \tau_1 \circ \quad \circ \tau_r$ $\quad \varepsilon(\gamma) = (-1)^r = 1$

$\gamma^{-1} = \tau_r \circ \tau_{r-1} \circ \dots \circ \tau_1 \Rightarrow \varepsilon(\gamma^{-1}) = (-1)^r = 1$

$H < G$ $\qquad$ $K < G$



Je suppose que $H \not\subset K$ et $K \not\subset H$ et $H \cup K$ sous groupe

Donc il existe $h \in H$ et $h \notin K$

$\underline{k \in K}$ et $\underline{k \notin H}$.

Si $\underline{h * k \in H}$, et $h \in H$ $\quad \underline{h^{-1} * \underbrace{h * k}_{\in H}} \in H$

$\in H$

Mais $\underline{h^{-1} * h * k = k \in K}$ Contradiction

Donc $h * k \in K$, $\quad \underbrace{h * k}_{\in K} * \underbrace{k^{-1}}_{\in K} = \underline{h \in K \cap H}$

À nouveau contradiction.

Conclusion si $H \not\subset K$ et $K \not\subset H$, alors

$H \cup K$ n'est pas un sous-groupe