Feuille de TD n° 1 - Correction
15 septembre 2020

Exercices fondamentaux

Exercice 1. Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose

$$\varphi(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

φ est clairement une forme bilinéaire symétrique. On a aussi $\varphi(f,f) \geqslant 0$. De plus,

$$\varphi(f,f) = 0 \implies f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f' = 0$$

car f'^2 est continue, positive et d'intégrale nulle. On en déduit

$$\varphi(f,f) = 0 \implies f = 0.$$

Exercice 2. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

Etudier les cas d'égalités.

Considérons le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$:

$$S\big((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)\big) = \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k,$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k * 1\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} 1^2\right) = n \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

Il y a égalité si, et seulement si, $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(1, \ldots, 1)$ sont colinéaires i.e. : $x_1 = \cdots = x_n$.

Exercice 3. Soient x, y deux vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien réel. Etablir

$$\left\| \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2} \right\| = \frac{\|x-y\|}{\|x\| \, \|y\|}$$

En développant le produit scalaire

$$\left\| \frac{x}{||x||^2} - \frac{y}{||y||^2} \right\|^2 = \frac{1}{||x||^2} - 2\frac{< x|y >}{||x||^2 \, ||y||^2} + \frac{1}{||y||^2} = \left(\frac{||x-y||}{||x|| \, ||y||} \right)^2 .$$

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Pour $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, on pose :

$$\varphi(u, v) = axx' + bxy' + cx'y + dyy'.$$

À quelle condition sur a, b, c et d a-t-on que φ est un produit scalaire ?

Posons $u = (1, 0), v = (0, 1)$, on doit avoir $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$, donc nécessairement $b = c$.

Pour $u = (x, y) \in E$, on doit avoir $\varphi(u, u) = ax^2 + 2bxy + dy^2 \geqslant 0$. Posons $u = (1, 0)$ et $v = (0, 1)$, on doit avoir $\varphi(u, u) = a > 0$ et $u(v, v) = d > 0$.

On a

$$\varphi(u, u) = a(x + \frac{b}{a}y)^2 + (d - \frac{b^2}{a})y^2,$$

posons $u = (-b, a)$, on doit avoir $\varphi(u, u) > 0$, donc $b^2 < ad$.

Dans ce cas, $\varphi(u, u)$ est “vue” comme une fonction du second degré de x à y fixé. Or $\Delta = 4(b^2 - ad)y^2 \leqslant 0$, alors $\varphi(u, u) \leqslant 0$.

Donc, les conditions sont $a > 0, d > 0, b = c, b^2 < ad$. Réciproquent on va démontrer φ est un produit scalaire avec ces conditions.

- Bilinéarité. Il est toujours vraie est facile à démontrer.
- Symétrie. Comme $b = c$, on a $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$ pour tout $(u, v) \in E^2$.
- Pour tout $u = (x, y) \in E$, $\varphi(u, u) = a(x + \frac{b}{a}y)^2 + (d - \frac{b^2}{a})y^2 \geqslant 0$ puisque $a > 0$ et $b^2 < ad$.
- Si $\varphi(u, u) = 0$, on a $x + \frac{b}{a}y = 0$ et $(d - \frac{b^2}{a})y^2 = 0$. Or $b^2 < ad$, on doit avoir $y = 0$, et $x = -\frac{b}{a}y = 0$, donc $u = (0, 0)$.

Donc, φ est un produit scalaire.

Exercices supplémentaires

Exercice 5. On considère $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$(f \mid g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour f strictement positive sur $[a,b]$ on pose

$$\ell(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}$$

Montrer que $\ell(f) \geqslant (b-a)^2$.
Etudier les cas d'égalités.

Comme $f(t) > 0, \forall t \in [a,b]$, on peut poser $f_1(t) = \sqrt{f(t)}, f_2(t) = \frac{1}{\sqrt{f(t)}}, t \in [a,b]$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$(f_1|f_2)^2 = (\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}dt)^2 = (b-a)^2 \leqslant ||f||||g|| = \int_a^b f(t)dt \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt = \ell(f).$$

Le cas d'égalité est que f_1 et f_2 sont proportionnels, c'est-à-dire $\exists c \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{f(t)} = c\frac{1}{\sqrt{f(t)}}, \forall t \in [a,b]$, donc $f(t) = c, \forall t \in [a,b]$.

Exercice 6. Soient $x_1, \ldots, x_n > 0$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = 1$.
Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geqslant n^2$$

Préciser les cas d'égalité.

Considérons le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et posons $X = (\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{x_n}})$, $Y = (\sqrt{x_1}, \ldots, \sqrt{x_n})$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$||X||||Y|| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geqslant < X|Y >^2 = n^2.$$

Le cas d'égalité est que X et Y sont colinéaires, c'est-à-dire $\exists c \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{x_k} = c\frac{1}{\sqrt{x_k}}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, donc $x_k = c$. Or $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1 = nc$, on a ansi :

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = c = \frac{1}{n}.$$

Exercice 7. Soit S l'ensemble des vecteurs de norme 1 d'un espace préhilbertien réel. Montrer

$$\forall x, y \in S, x \neq y \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, (1-\lambda)x + \lambda y \notin S$$

Comment interpréter graphiquement ce résultat ?

Soient $x, y \in \mathcal{S}$ avec $x \neq y$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$||(1-\lambda)x + \lambda y||^2 = \lambda^2 + 2\lambda(1-\lambda) < x|y > +(1-\lambda)^2$$

qui est une expression polynomiale en λ dont le coefficient du second degré est $2 - 2 < x|y >$. Puisque les vecteurs x et y sont distincts et de même norme, ils ne peuvent être positivement liés et donc

$$< x|y >< ||x|| \, ||y|| = 1.$$

Par suite

$$2 - 2 < x|y >> 0.$$

Ainsi la quantité $||(1-\lambda)x + \lambda y||^2$ est une expression polynomiale du second degré exactement. Puisque celle-ci prend la valeur 1 pour $\lambda = 0$ et pour $\lambda = 1$, elle ne peut reprendre la valeur 1 pour aucune autre valeur λ et ceci permet de conclure.

Exercice 8. Soient E un espace préhilbertien réel et $f : E \to E$ une application surjective telle que pour tout $x, y \in E$, on ait

$$< f(x) \mid f(y) >=< x \mid y >$$

Montrer que f est un endomorphisme de E.

Aisément, on a :

$$< f(\lambda x + \lambda' x')|f(y) >=< \lambda f(x) + \lambda' f(x')|f(y) >$$

donc, comme f est surjective, on a :

$$< f(\lambda x + \lambda' x') - (\lambda f(x) + \lambda' f(x'))|z >= 0$$

pour tout $z \in E$, d'où en particulier pour $z = f(\lambda x + \lambda' x') - (\lambda f(x) + \lambda' f(x'))$. D'où l'on déduit que :

$$\big|\big|f(\lambda x + \lambda' x') - (\lambda f(x) + \lambda' f(x'))\big|\big| = 0$$

et donc $f(\lambda x + \lambda' x') - (\lambda f(x) + \lambda' f(x')) = 0$. Ainsi f est linéaire.