FEUILLE DE TD N$^{\text{o}}$ 1 - LE PRODUIT SCALAIRE & LA NORME

7 SEPTEMBRE 2020

Exercices fondamentaux

Exercice 1. Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose

$$\varphi(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

Exercice 2. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

Etudier les cas d'égalités.

Exercice 3. Soient x, y deux vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien réel. Etablir

$$\left\| \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2} \right\| = \frac{\|x-y\|}{\|x\|\,\|y\|}$$

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Pour $u = (x,y)$ et $v = (x', y')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, on pose :

$$\varphi(u,v) = axx' + bxy' + cx'y + dyy'.$$

À quelle condition sur a, b, c et d a-t-on que φ est un produit scalaire ?

Exercices supplémentaires

Exercice 5. On considère $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$(f \mid g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour f strictement positive sur $[a,b]$ on pose

$$\ell(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}$$

Montrer que $\ell(f) \geqslant (b-a)^2$.
Etudier les cas d'égalités.

Exercice 6. Soient $x_1, \ldots, x_n > 0$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = 1$.
Montrer que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geqslant n^2$$

Préciser les cas d'égalité.

Exercice 7. Soit S l'ensemble des vecteurs de norme 1 d'un espace préhilbertien réel. Montrer

$$\forall x, y \in S, x \neq y \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, (1-\lambda)x + \lambda y \notin S$$

Comment interpréter graphiquement ce résultat ?

Exercice 8. Soient E un espace préhilbertien réel et $f : E \to E$ une application surjective telle que pour tout $x, y \in E$, on ait

$$< f(x) \mid f(y) > = < x \mid y >$$

Montrer que f est un endomorphisme de E.