Feuille de TD n° 3

Images réciproques, injections, surjections et groupes.

11 octobre 2020

Exercice 1.

1. Déterminer l'image réciproque $f^{-1}(I)$ dans les cas suivants :
   (a) $f(x) = \sin(x)$ et $I = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.
   (b) $f(x) = \cos(x)$ et $I = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
2. Déterminer $f\left(f^{-1}(I)\right)$ avec $f(x) = \sin(x)$ et $I = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.
3. Déterminer $f^{-1}\left(f(I)\right)$ dans les cas suivants :
   (a) $f(x) = \cos(x)$ et $I = \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$,
   (b) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ et $I = [2, 3]$.

Exercice 2. Les applications suivantes sont-elles injectives ? Surjectives ?

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; $(x, y) \longmapsto 2y$,
2. $f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$; $(x, y) \longmapsto (1, x - y, y)$,
3. $f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $(x, y) \longmapsto (x + y, x - y)$,
4. $f_4 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$; $n \longmapsto n + 1$,
5. $f_5 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$; $n \longmapsto n + 1$,
6. $f_6 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$; $n \longmapsto \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{sinon,} \end{cases}$
7. $f_7 : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; $(u_0, u_1, u_2, \ldots) \longmapsto (0, u_0, u_1, u_2, \ldots)$,
8. $f_8 : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; $(u_0, u_1, u_2, \ldots) \longmapsto (u_1, u_2, u_3, \ldots)$,
9. $f_9 : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}^*$; $(n, p) \longmapsto 2^n(2p + 1)$.

Exercice 3. Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Soient A une partie de E et B une partie de F. Démontrer que $f\left(A \cap f^{-1}(B)\right) = f(A) \cap B$.
2. Démontrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E, $A = f^{-1}\left(f(A)\right)$.
3. Démontrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F, $B = f\left(f^{-1}(B)\right)$.

Exercice 4. Soient E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 5. Soient E et I deux ensembles. Soit $f : E \longrightarrow I$ une application surjective. On pose, pour tout $i \in I$, $A_i = f^{-1}\left(\{i\}\right)$. Montrer que la famille $(A_i)_{i \in I}$ forme une partition de E.

Exercice 6. Soit H un sous-groupe strict de G. Déterminer le sous-groupe engendré par le complémentaire de H.

Exercice 7.

1. Soit G un groupe abélien, $x \in G$ un élément d'ordre p et $y \in G$ un élément d'ordre q. Montrer que xy est d'ordre au plus pq.
2. xy est-il nécessairement d'ordre pq ? (donnez des exemples)
3. Si $G = \mathrm{Bij}\,(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$, montrer que $f : (m, n) \mapsto (-n, m)$ et $g : (m, n) \mapsto (n, -m - n)$ sont des éléments de G d'ordre respectif 4 et 3. Quel est l'ordre de $f \circ g$?

Exercice 8. On considère $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
2. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \setminus \{0\}$ est stable par la multiplication, possède un élément neutre, mais n'est pas un groupe.
3. On note $N(a + b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$. Montrer que, pour tous x, y de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on a $N(xy) = N(x)N(y)$.
4. En déduire que les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ sont ceux s'écrivant $a + b\sqrt{2}$ avec $a^2 - 2b^2 = \pm 1$.

Indications

Exercice 1

Pour l'image réciproque, revenir à la définition de $f^{-1}(A)$ et résoudre inéquation ou équation.

Pour l'image directe, on peut s'aider de tableaux de variations.

On pourra utiliser que $f(\cup_{i\in I} A_i) = \cup_{i\in I} f(A_i)$.

Exercice 2

Utiliser les caractérisations de l'injectivité et la surjectivité de $f : E \longrightarrow F$.

• pour montrer que f est injective, démarrer par : soient $u \in E$ et $v \in E$ tels que $f(u) = f(v)$. Puis montrer que $u = v$.

• pour montrer que f n'est pas injective, trouver deux éléments de E $u \neq v$ tels que $f(u) = f(v)$.

• pour montrer que f est surjective, démarrer par : soit $y \in F$. Puis chercher un élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

• pour montrer que f n'est pas surjective, trouver un élément y de E qui n'admet pas d'antécédent dans E par f.

6. On pourra remarque que $f_6(n)$ est positif si et seulement si n est pair, et est négatif si et seulement si n est impair.

9. Pour la surjectivité, on pourra utiliser la décomposition en facteurs premiers d'un nombre entier.

Exercice 3

Raisonner par double inclusion pour démontrer les égalités d'ensembles.

Utiliser notamment :

$y \in f(C) \Leftrightarrow \exists x \in C, y = f(x)$

et $x \in f^{-1}(D) \Leftrightarrow f(x) \in D$.

2. Pour le sens réciproque, supposer que $f(u) = f(v)$ et prendre $A = \{v\}$.

Exercice 4

Raisonner par double implication.

Pour montrer l'injectivité, on suppose que $f(u) = f(v)$ avec $(u, v) \in E^2$. Utiliser la surjectivité pour justifier l'existence de $(u_1, v_1) \in E^2$ tel que $u = f(u_1)$ et $v = f(v_1)$. On en déduit que $f(f(u_1)) = f(f(v_1))$. Il reste à faire apparaître la relation vérifiée par f et conclure...

Exercice 5

Vérifier les trois points de la définition d'une partition.